

Charakterisierung ternärer Operatorenringe

von

Heinrich Zettl

aus

Kulmbach

Charakterisierung
des Open-Source-Modells



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Charakterisierung ternärer Operatorenringe

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Heinrich Zettl

aus

Kulmbach



Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Februar 1979

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter: Professor Dr. E. Albrecht

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

§1. Definitionen und Bezeichnungen	... 1
§2. Die Darstellung von Hilbertmoduln als ternäre Operatorenringe	... 4
§3. Einige Lemmata über ternäre Operatorenringe	... 13
§4. Der Darstellungssatz für ternäre C^* -Ringe	... 28
§5. Der Darstellungssatz für ternäre W^* -Ringe	... 51
Literaturverzeichnis	... 71

Einleitung

Ein ternärer Operatorenring ist ein Vektorraum $\mathfrak{R}$ von beschränkten linearen Operatoren eines Hilbertraumes H in einen Hilbertraum K , der $\mathfrak{R}\mathfrak{R}\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$ erfüllt, also bezüglich der ternären Operation $(A, B, C) \mapsto AB^*C$ abgeschlossen ist. HESTENES [2] betrachtete erstmals ternäre Operatorenringe für endlichdimensionale Räume H und K .

In dieser Arbeit werden ternäre Operatorenringe als abstrakte ternäre Ringe charakterisiert. Dies geschieht entsprechend der Charakterisierung von Operatoralgebren eines Hilbertraumes als normierte Algebren, wie sie von GELFAND, NEUMARK, SEGAL und SAKAI vorgenommen wurde. Wie in der Theorie der Operatoralgebren werden auch hier nur norm- bzw. schwach abgeschlossene ternäre Operatorenringe untersucht.

Das Charakterisierungsproblem für ternäre Operatorenringe besteht darin, den Begriff eines abstrakten ternären Ringes einzuführen und einen Darstellungssatz zu beweisen, der besagt, daß jeder abstrakte ternäre Ring isomorph einem ternären Operatorenring ist. Entsprechend der erwähnten Aufteilung der ternären Operatorenringe in norm- bzw. schwach abgeschlossene Ringe wurden die zwei Klassen abstrakter ternärer Ringe wie folgt definiert:

Ein ternärer C*-Ring ist ein Banachraum $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ mit einer ternären Operation $(\cdot, \cdot, \cdot)$, d.h. einer Abbildung $(\cdot, \cdot, \cdot) : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$, welche in der mittleren Argumentstelle konjugiert-linear und in den anderen beiden linear ist und einer Assoziativitätsbedingung genügt (vgl. Def. (1.1)), so daß

$$\|(x,y,z)\| \leq \|x\|\|y\|\|z\| \quad \text{und} \quad \|(x,x,x)\| = \|x\|^3$$

für alle $x,y,z \in \mathfrak{X}$ gilt. Ein ternärer W^* -Ring ist ein ternärer C^* -Ring, für den zusätzlich gefordert wird, daß er Dualraum eines Banachraumes ist.

Es wird folgender Darstellungssatz für ternäre C^* -Ringe bewiesen (hier in gekürzter Form)

Satz(4.1) Zu jedem ternären C^* -Ring $(\mathfrak{X},(.,.,.),\|.\|)$ existiert genau ein linearer Operator $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ mit $T^2 = 1$ und $T((x,y,z)) = (Tx,y,z) = (x,Ty,z) = (x,y,Tz)$ für alle $x,y,z \in \mathfrak{X}$ derart, daß es Hilberträume H,K und einen normabgeschlossenen ternären Operatorenring $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(H,K)$ gibt, für die $\mathfrak{X}$ versehen mit der ternären Operation $T.(.,.,.)$ und der ursprünglichen Norm zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist.

Der Beweis dieses Satzes besteht aus zwei Schritten: Im ersten wird zu gegebenem ternären C^* -Ring ein geeigneter Hilbertmodul über einer C^* -Algebra konstruiert. Im zweiten Schritt wird dieser Hilbertmodul als ternärer Operatorenring dargestellt, womit dann die gesuchte Darstellung des ternären C^* -Ringes gefunden ist.

Die erste wichtige Aussage bei der Konstruktion des erwähnten Hilbertmoduls ist folgender Satz (hier ebenfalls in gekürzter Fassung)

Satz(4.3) Zu jedem ternären C^* -Ring $(\mathfrak{X},(.,.,.),\|.\|)$ existieren genau eine C^* -Algebra $G \subset \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ und genau eine stetige, hermitesche G -Form $\alpha : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow G$ derart, daß

$\alpha(x, y)$ in der Algebra G normtotal ist und so, daß $(x, y, z) = \alpha(z, y)(x)$ für alle x, y, z aus $\mathfrak{X}$ gilt.

Anschließend wird gezeigt, daß genau ein linearer Operator $T : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ mit $T^2 = 1$ und $T((x, y, z)) = (Tx, y, z) = (x, Ty, z) = (x, y, Tz)$ für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}$ existiert, für den $\mathfrak{X}$ versehen mit der G -Form $(x, y) \mapsto \alpha(Tx, y)$ einen Hilbertmodul über der C^* -Algebra G bildet. Die Darstellung dieses Hilbertmoduls beruht dann auf einer verallgemeinerten GNS-Konstruktion, deren Ansatz sich bei PASCHKE [5] findet. In Paragraph 2 wird dies ausführlich erläutert.

An einem Beispiel (4.10) wird gezeigt, daß der im Satz (4.1) genannte Operator T i.A. von der Identität verschieden ist. Es stellt sich daher das Problem, diejenigen ternären C^* -Ringe zu charakterisieren, für welche $T = 1$ ist. Aus (4.3) ergibt sich, daß dies genau dann eintritt, wenn die G -Form α auf $\mathfrak{X}$ positiv ist, d.h. $\alpha(x, x) \geq 0$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ erfüllt. (4.5) liefert ferner, daß der Fall $T \in \{+1, -1\}$ genau dann vorliegt, wenn die Algebra G aus (4.3) ein Faktor ist.

Mit Hilfe des Satzes (4.1) ergibt sich der folgende Darstellungssatz für ternäre W^* -Ringe (hier in gekürzter Fassung)

Satz(5.1) Zu jedem ternären W^* -Ring $(\mathfrak{X}, (., ., .), \|\cdot\|)$ existieren Hilberträume H, K und ein schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring $\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(H, K)$ derart, daß $\mathfrak{X}$ versehen mit der ternären Operation $T \cdot (., ., .)$ und der ursprünglichen Norm zu $\mathfrak{A}$ (isometrisch- und

schwach*-) isomorph ist, wobei T den in (4.1) genannten Operator bedeutet.

Um diesen Satz zu beweisen, wird im ersten Schritt die folgende Verschärfung von (4.3) gezeigt

Korollar(5.11) Ist $(\mathfrak{H}, (.,.), ".")$ ein ternärer W^* -Ring und sind $\mathfrak{A}$ die C^* -Algebra und α die hermitesche $\mathfrak{A}$ -Form aus Satz (4.3) sowie T der Operator aus Satz (4.1), so bildet die Multiplier Algebra $M(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ eine W^* -Algebra, und versehen mit der $\mathfrak{A}$ -Form $(x, y) \mapsto \alpha(Tx, y)$ ist $\mathfrak{H}$ ein selbstdualer Hilbertmodul über $M(\mathfrak{A})$.

Im zweiten Schritt wird dann benutzt, daß ein Hilbertmodul, der über einer W^* -Algebra selbstdual ist, als schwach abgeschlossener ternärer Operatorring dargestellt werden kann.

Korollar (5.11) beinhaltet die Umkehrung des Satzes von PASCHKE [5], daß jeder Hilbertmodul, der über einer W^* -Algebra selbstdual ist, einen Prädualraum besitzt, also einen ternären W^* -Ring im Sinne der vorne gegebenen Definition bildet.

Der Beweis von Satz (5.1) liefert außerdem die Eindeutigkeit des Präduals eines ternären W^* -Ringes bis auf Isometrie. In Satz (5.12) wird eine explizite Beschreibung des Prädualraumes gegeben. Diese beruht auf einer Polardarstellung der schwach* stetigen linearen Funktionale. Bei deren Polardarstellung treten partielle Isometrien auf, deren Betrachtung zum Teil in Paragraph 3 vorgenommen wird.

Ferner wird in Paragraph 3 der folgende Dich-
tesatz vom Kaplansky'schen Typ bewiesen, der im

Beweis von Satz (5.1) mehrfach eingeht:

Satz(3.5) Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}(H, K)$ ein ternärer Operatorenring, so liegt die Einheitskugel von $\mathfrak{A}$ stark- und schwach dicht in der Einheitskugel des schwachen Abschlusses von $\mathfrak{A}$.

Eine genaue Erläuterung der Beweisgedanken zu den beiden Hauptsätzen, (4.1) und (5.1), findet sich am Beginn des jeweiligen Paragraphen (S.29, S.52).

An dieser Stelle möchte ich meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow, für die Anregung des Themas und seine freundliche Unterstützung sehr herzlich danken. Daneben gilt mein aufrichtiger Dank Herrn Professor Dr. E. Albrecht, dessen Ratschläge sehr zur Vereinfachung der Beweise des Paragraphen 4 dieser Arbeit beigetragen haben.

§1. Definitionen und Bezeichnungen

(1.1) Sei $\mathfrak{X}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Ist $(.,.,.) : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{C}$ eine dreistellige Verknüpfung auf $\mathfrak{X}$, so heißt das Paar $(\mathfrak{X}, (.,.,.))$ ein ternärer Ring, wenn für alle $v, w, x, y, z \in \mathfrak{X}$ gilt:

Die Abbildungen $a \mapsto (a, x, y)$, $a \mapsto (x, y, a)$ sind linear und $a \mapsto (x, a, y)$ ist konjugiert-linear auf $\mathfrak{X}$,

$$(v, w, (x, y, z)) = ((v, w, x), y, z) = (v, (y, x, w), z).$$

Die Verknüpfung $(.,.,.)$ werde sodann als die ternäre Operation des ternären Ringes bezeichnet.

Dieser Begriff des ternären Ringes stimmt mit der von HESTENES [2] gegebenen Definition einer *-linearen ternären Algebra überein.

In den nächsten beiden Definitionen fassen wir nun unsere topologischen Voraussetzungen zusammen.

(1.2) Sei $(\mathfrak{X}, (.,.,.))$ ein ternärer Ring.

Ist $\|.\|$ eine Norm auf $\mathfrak{X}$, die für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}$

$$\|(x, y, z)\| \leq \|x\| \|y\| \|z\|$$

erfüllt, so heiße das Tripel $(\mathfrak{X}, (.,.,.), \|\cdot\|)$ ein normierter ternärer Ring.

Dieser werde als vollständig normiert bezeichnet, wenn $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist.

(1.3) Ein vollständig normierter ternärer Ring $(\mathfrak{X}, (.,.,.), \|\cdot\|)$ heiße ein ternärer C*-Ring, wenn für

alle $x \in \mathfrak{X}$ die Bedingung

$$\|(x, x, x)\| = \|x\|^3$$

erfüllt ist.

Ist $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ zudem dualer Raum eines Banachraumes, so werde $(\mathfrak{X}, (\cdot, \cdot, \cdot), \|\cdot\|)$ als ein ternärer W*-Ring bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit verwenden wir den Begriff des Hilbertmoduls über einer C*-Algebra, wie er sich bei PASCHKE [5] findet. Für den Fall einer kommutativen C*-Algebra wurde ein derartiges System von KAPLANSKY [4] als C*-Modul eingeführt.

Eine [5] entsprechende Definition ist in RIEFFEL [8] (2.1 und 2.8) enthalten.

(1.4) Seien G eine C*-Algebra und $\mathfrak{M}$ ein rechter Banachmodul über G (so daß also insbesondere $\|x \cdot a\| \leq \|x\| \|a\|$ und $\lambda(x \cdot a) = (\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$, $a \in G$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gelten).

Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow G$ heißt ein G-wertiges inneres Produkt auf $\mathfrak{M}$, wenn für alle $a \in G$ und $x, y \in \mathfrak{M}$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

$z \mapsto \langle z | x \rangle$ ist eine lineare Abbildung auf $\mathfrak{M}$;

$\langle x \cdot a | y \rangle = \langle x | y \rangle a$;

$\langle x | y \rangle^* = \langle y | x \rangle$;

$\langle x | x \rangle \geq 0$; $\langle x | x \rangle = 0$ nur, wenn $x = 0$.

Ist nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein G-wertiges inneres Produkt auf $\mathfrak{M}$, so wird eine Norm auf $\mathfrak{M}$ definiert durch

$$x \mapsto \|\langle x | x \rangle\|^{1/2} .$$

Wenn $\mathcal{H}$ in dieser Norm vollständig ist, so heißt das Paar $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Hilbertmodul über $\mathcal{G}$.

(1.5) Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Hilbertmodul über der C^* -Algebra $\mathcal{G}$.

Durch $x \mapsto \langle \cdot | x \rangle$ ist dann eine isometrische Isomorphie von $\mathcal{H}$ in den mit der konjugierten Skalarmultiplikation versehenen Raum $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ aller normstetigen $\mathcal{G}$ -Modulhomomorphismen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{G}$ gegeben. Existiert nun zu jedem $\tau \in \text{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ ein $x \in \mathcal{H}$ derart, daß $\tau = \langle \cdot | x \rangle$ gilt, so heißt $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ selbstdual über $\mathcal{G}$.

Hilberträume seien im folgenden stets mit $\mathbb{C}$ als skalarem Körper vorausgesetzt.

Sind H und K Hilberträume, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(H, K)$ die Menge aller stetigen linearen Operatoren von H nach K ; wir schreiben $\mathcal{L}(H)$ für den Raum $\mathcal{L}(H, H)$.

(1.6) Seien H und K Hilberträume.

Ein linearer Teilraum $\mathfrak{R}$ von $\mathcal{L}(H, K)$, der

$$\mathfrak{R}\mathfrak{R}^*\mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$$

erfüllt, heiße ein ternärer Operatorenring (zwischen H und K).

§2. Die Darstellung von Hilbertmoduln als ternäre Operatorenringe

Im folgenden sei $(\mathfrak{M}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein fester Hilbertmodul über der C*-Algebra G (s. Definition (1.4)).

Zur Theorie solcher Moduln benützen wir im weiteren Ergebnisse von PASCHKE [5], [6] und RIEFFEL [7].

Als erstes stellen wir in (2.1) bis (2.3) einige wichtige Eigenschaften des Moduls $\mathfrak{M}' = \text{Hom}_G(\mathfrak{M}, G^{**})$ zusammen. Diese sind sowohl für das Dichtelemma (2.6) wie auch im Beweis des Satzes (5.1) von großer Wichtigkeit (s. die Argumentation zu (5.3) bis (5.9)), dessen Konstruktionen darauf beruhen, daß $\mathfrak{M}'$ ein selbstdualer Hilbertmodul über G^{**} ist, in welchem $\mathfrak{M}$ bezüglich einer gewissen schwach*Topologie dicht liegt.

(2.1) Versetzen wir $\mathfrak{M}'$ mit der konjugierten Skalarmultiplikation und der durch

$$(\tau \cdot A)(x) := A \cdot \tau(x) \quad \forall \tau \in \mathfrak{M}', x \in \mathfrak{M}, A \in G^{**}$$

gegebenen Moduloperation ist $\mathfrak{M}'$ ein rechter Banachmodul über G^{**} . Dieser enthält $\mathfrak{M}$ als G -Untermodul vermöge der isometrischen Einbettung

$$x \mapsto \langle \cdot | x \rangle.$$

$\mathfrak{M}'$ besitzt einen kanonischen Prädualraum, den wir im weiteren mit $\mathfrak{M}'_*$ bezeichnen:

$\mathcal{L}(\mathfrak{M}, G^{**})$ ist der Dualraum des projektiven Tensorproduktes $\mathfrak{M} \hat{\otimes} G^*$, und $\mathfrak{M}'$ ist in $\mathcal{L}(\mathfrak{M}, G^{**})$ bezüglich der von $\mathfrak{M} \hat{\otimes} G^*$ erzeugten schwach*Topologie abgeschlossen (vgl. [5], 3.8). In [7], 2.13 wird dieser

Präidualraum von $\mathcal{M}'$ in der Form $\mathcal{M} \hat{\otimes}_G G^*$ angegeben.

Die Topologie $\sigma(\mathcal{M}', \mathcal{M}'^*)$ werden wir kurz die schwache Topologie von $\mathcal{M}'$ nennen. Auf normbeschränkten Mengen stimmt sie mit der von $\mathcal{M} \otimes G^*$, d.h. der von allen konjugiert-linearen Funktionalen

$$\tau \mapsto \varphi(\tau(x)), \quad \varphi \in G^*, x \in \mathcal{M}$$

erzeugten Topologie überein.

Welche grundlegende Bedeutung dem Modul $\mathcal{M}'$ zukommt, zeigt folgende Proposition, die in [5], 4.3 bewiesen ist.

(2.2) Proposition Die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kann zu einer (ebenfalls als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichneten) Form auf $\mathcal{M}' \times \mathcal{M}'$ fortgesetzt werden derart, daß $(\mathcal{M}', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einem selbstdualen Hilbertmodul über der W^* -Algebra G^{**} wird. Es gilt dabei

$$\tau(x) = \langle x | \tau \rangle \quad \forall \tau \in \mathcal{M}'^*, x \in \mathcal{M}.$$

Die von allen Seminormen

$$\tau \mapsto \varphi(\langle \tau | \tau \rangle)^{1/2}, \quad 0 \leq \varphi \in G^*$$

auf $\mathcal{M}'$ erzeugte lokalkonvexe Hausdorfftopologie nennen wir die starke Topologie von $\mathcal{M}'$. Es gilt

(2.3) Proposition $\mathcal{M}$ ist stark- und schwach dicht in $\mathcal{M}'$. Die Moduloperation $(\tau, A) \mapsto \tau \cdot A$ ist getrennt stark- und schwach stetig. Die Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist auf normbeschränkten Teilmengen von $\mathcal{M}'$ getrennt schwach stetig.

Beweis: Daß $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}''$ stark dicht ist, folgt nach geringer Modifikation des Beweises von 2.3 in [6]. Daß $\mathfrak{M}$ schwach dicht in $\mathfrak{M}''$ ist, ergibt sich sofort aus der für alle $0 \leq \varphi \in G^*$, $\tau \in \mathfrak{M}''$ und $x, y \in \mathfrak{M}$ gültigen Beziehung

$$|\varphi(\langle x | \tau - y \rangle)| \leq \varphi(\langle x | x \rangle)^{1/2} \varphi(\langle \tau - y | \tau - y \rangle)^{1/2}.$$

Die starke Stetigkeit der Moduloperation erhält man aus

$$\begin{aligned} \varphi(\langle \tau \cdot A | \tau \cdot A \rangle)^{1/2} &= \varphi(A^* \langle \tau | \tau \rangle A)^{1/2} \leq \\ &\leq \varphi(A^* A)^{1/2} \|\tau\|. \end{aligned}$$

Die restlichen Behauptungen sind klar. ./.

Den Ansatz zur Darstellung von $(\mathfrak{M}, \langle \cdot | \cdot \rangle, G)$, die wir nun entwickeln, findet man im Abschnitt drei von PASCHKE [4].

Dort wird für ein gegebenes positives Funktional $\varphi \in G^*$ die GELFAND-NEUMARK-SEGAL Konstruktion nicht nur für G , sondern auch für den mit der positiven hermiteschen Form $\varphi \langle \cdot | \cdot \rangle$ versehenen Raum $\mathfrak{M}$ durchgeführt. Man gewinnt so aus G bzw. $\mathfrak{M}$ den Hilbertraum G_φ bzw. $\mathfrak{M}_\varphi$.

Mit Hilfe dieser Hilberträume können wir nun G als C^* -Algebra $\pi_\varphi(G) \subset \mathcal{L}(G_\varphi)$ und $\mathfrak{M}$ als normabgeschlossenen ternären Operatorenring $U_\varphi(\mathfrak{M}) \subset \mathcal{L}(G_\varphi, \mathfrak{M}_\varphi)$ darstellen. Für den Beweis des Dichtelemmas (2.5), welches in Paragraph 5 mehrfach eingeht, ist es jedoch notwendig, neben den Darstellungen $\{U_\varphi, \pi_\varphi\}$ von $(\mathfrak{M}, \langle \cdot | \cdot \rangle, G)$ Fortsetzungen derselben zu Darstellungen

$\{U_{\varphi}^W, \tau_m^W\}$ von $(\mathfrak{M}', \langle . | . \rangle, \mathfrak{A}^{**})$ zu betrachten, wobei τ_m^W die Fortsetzung von τ_{φ} auf $\mathfrak{A}^{**}$ gemäß SAKAI [9], 1.16 bedeutet.

Durch die übliche Summenbildung

$$U^W := \sum_{0 \leq \varphi \in \mathfrak{A}^*} U_{\varphi}^W, \quad \tau^W := \sum_{0 \leq \varphi \in \mathfrak{A}^*} \tau_{\varphi}^W$$

ergibt sich in (2.5) eine treue Darstellung

$$U^W : \mathfrak{M}' \rightarrow \mathcal{L}(H, K), \quad \pi^W : \mathfrak{A}^{**} \rightarrow \mathcal{L}(H)$$

von $(\mathfrak{M}', \langle . | . \rangle, \mathfrak{A}^{**})$, welche die starke- bzw. die schwache Topologie von $\mathfrak{M}'$ homöomorph in die starke- bzw. die schwache Operator-topologie überführt und für die $U^W(\mathfrak{M}')$ ein schwachabgeschlossener ternärer Operatorenring ist.

Mit $U := \text{rest}_{\mathfrak{M}} U^W$ liefert dies eine treue Darstellung $U : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$, $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ von $(\mathfrak{M}, \langle . | . \rangle, \mathfrak{A})$.

Analog erhalten wir in (2.7) eine Darstellung $\{V, \tau\}$ von $(\mathfrak{M}, \langle . | . \rangle, \mathfrak{A})$ mit schwachabgeschlossenem $V(\mathfrak{M})$ für den Fall, daß $(\mathfrak{M}, \langle . | . \rangle)$ ein selbstdualer Hilbertmodul über der W^* -Algebra $\mathfrak{A}$ ist.

Die folgende Proposition enthält die zu einem positiven Funktional $\varphi \in \mathfrak{A}^*$ gehörige GNS-Darstellung von $(\mathfrak{M}', \langle . | . \rangle, \mathfrak{A}^{**})$.

(2.4) Proposition Sei $\varphi \in G^*$ positiv, sei $\{\pi_{\varphi}^W, G_{\varphi}\}$ die zu φ gehörige zyklische Darstellung von G , fortgesetzt auf G^{**} .

Dann existieren ein Hilbertraum $\mathfrak{H}_{\varphi}$ und eine lineare Abbildung $U_{\varphi}^W : \mathfrak{H}'' \rightarrow \mathcal{L}(G_{\varphi}, \mathfrak{H}_{\varphi})$ mit $\|U_{\varphi}^W\| \leq 1$ so, daß für alle $\tau, \eta \in \mathfrak{H}''$ und $A \in G^{**}$

$$U_{\varphi}^W(\tau \cdot A) = U_{\varphi}^W(\tau) \pi_{\varphi}^W(A),$$

$$U_{\varphi}^W(\eta) * U_{\varphi}^W(\tau) = \pi_{\varphi}^W(\langle \tau | \eta \rangle)$$

gilt. U_{φ}^W ist auf beschränkten Mengen bezüglich $\sigma(\mathfrak{H}'', \mathfrak{H}''_*)$ und der schwachen Operatortopologie stetig.

Beweis: Sei OBDA φ ein state von G .

Durch $(x, y) \mapsto \varphi(\langle x | y \rangle)$ ist eine positive hermitesche Form auf $\mathfrak{H}$ gegeben.

Sei $N_{\varphi} := \{ x \in \mathfrak{H} \mid \varphi(\langle x | x \rangle) = 0 \}$. Bezeichnet $x \mapsto (x)_{\varphi}$ die Restklassenabbildung $\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}/N_{\varphi}$, so wird auf $\mathfrak{H}/N_{\varphi}$ durch

$$\langle (x)_{\varphi} | (y)_{\varphi} \rangle := \varphi(\langle x | y \rangle)$$

ein Skalarprodukt definiert. Sei $\mathfrak{H}_{\varphi}$ der zu $\mathfrak{H}/N_{\varphi}$ gehörige Hilbertraum.

Analog diesem Prozeß entsteht bei der GNS-Konstruktion für G der Hilbertraum G_{φ} , dessen Restklassenabbildung wir mit $a \mapsto (a)_{\varphi}$ notieren.

(2.3.1) Zu jedem $\tau \in \mathfrak{H}''$ existiert genau ein Vektor $(\tau)_{\varphi}$ in $\mathfrak{H}_{\varphi}$ derart, daß für alle $x \in \mathfrak{H}$

$$\varphi(\tau(x)) = \langle (x)_{\varphi} | (\tau)_{\varphi} \rangle$$

gilt; für $x \in \mathfrak{H}$ hat man $(x)_{\varphi} = (\langle \cdot | x \rangle)_{\varphi}$.

Mit Hilfe der Ungleichung

$$\tau(x) * \tau(x) \leq \|\tau\|^2 \langle x | x \rangle$$

gemäß [5], 2.8 ergibt sich nämlich

$$|\varphi(\tau(x))| \leq \varphi(\tau(x) * \tau(x))^{1/2} \leq \|\tau\| \varphi(\langle x | x \rangle)^{1/2}$$

für alle $x \in \mathfrak{H}$, weshalb $(x)_{\varphi} \mapsto \varphi(\tau(x))$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{H}/N_{\varphi}$ bildet.

(2.3.2) Die Abbildung $(a)_{\varphi} \mapsto (\tau \cdot a)_{\varphi}$ ist wohldefiniert, linear und stetig und hat Norm $\leq \|\tau\|$. Daher existiert genau ein Operator $U_{\varphi}^W(\tau) \in \mathcal{L}(G_{\varphi}, \mathfrak{H}_{\varphi})$, der diese Abbildung fortsetzt. Die Hilbertraumadjungierte von $U_{\varphi}^W(\tau)$ ist gegeben durch

$$U_{\varphi}^W(\tau) * (x)_{\varphi} = (\tau(x))_{\varphi} \quad \forall x \in \mathfrak{H}.$$

Denn da $\{a \mid \varphi(a * a) = 0\}$ ein Linksideal in G ist, folgt für alle $x \in \mathfrak{H}$ aus $\varphi(a * a) = 0$ auch

$$\langle (x)_{\varphi} \mid (\tau \cdot a)_{\varphi} \rangle = \varphi(a * \tau(x)) = \varphi(\tau(x) * a) = 0;$$

Die Abbildung $(x)_{\varphi} \mapsto (\tau(x))_{\varphi}$ ist wegen

$$\varphi(\tau(x) * \tau(x))^{1/2} \leq \|\tau\| \varphi(\langle x | x \rangle)^{1/2}$$

wohldefiniert, linear und stetig. Ferner gilt

$$\langle (x)_{\varphi} \mid (\tau \cdot a)_{\varphi} \rangle = \varphi(a * \tau(x)) = \langle (\tau(x))_{\varphi} \mid (a)_{\varphi} \rangle_{G_{\varphi}}$$

d.h. $(a)_{\varphi} \mapsto (\tau \cdot a)_{\varphi}$ und $(x)_{\varphi} \mapsto (\tau(x))_{\varphi}$ sind zueinander adjungiert. Damit ist (2.3.2) klar.

Rechnen wir nun die für U_{φ}^W und τ_{φ}^W angegebenen Beziehungen nach. Zunächst gilt

$$U_{\varphi}^W(\tau \cdot A) (b)_{\varphi} = ((\tau \cdot A) \cdot b)_{\varphi} = (\tau \cdot (Ab))_{\varphi} =$$

$$U_{\tau}^W(\tau)(Ab)_{\mathfrak{w}} = U_{\mathfrak{w}}^W(\tau) \tau^W(A)(b)_{\mathfrak{w}}$$

für alle $b \in G$. Sodann sei gemäß (2.3) $\{x^{\alpha}\}_{\alpha}$ ein Netz in $\mathfrak{A}$, welches stark gegen $\eta \in \mathfrak{A}'$ konvergiert. Es gilt

$$U_{\mathfrak{w}}^W(\eta)(a)_{\mathfrak{w}} = (\eta \cdot a)_{\mathfrak{w}} = \lim_{\alpha} (x^{\alpha} \cdot a)_{\tau} =$$

$$\lim_{\alpha} U_{\mathfrak{w}}^W(x^{\alpha})(a)_{\mathfrak{w}}$$

in der Norm von $\mathfrak{A}_{\mathfrak{w}}$. Vermöge [5], 2.8 hat man

$$\|(\langle \eta \cdot a - x^{\alpha} \cdot a | \tau \rangle)_{\mathfrak{w}}\|_G^2 =$$

$$\mathfrak{w}(\langle \eta \cdot a - x^{\alpha} \cdot a | \tau \rangle * \langle \eta \cdot a - x^{\alpha} \cdot a | \tau \rangle) \leq$$

$$\leq \|\tau\|^2 \mathfrak{w}(a * \langle \eta - x^{\alpha} | \eta - x^{\alpha} \rangle a) \xrightarrow{\alpha} 0.$$

Es folgt daher

$$\pi_{\mathfrak{w}}^W(\langle \eta | \tau \rangle)(a)_{\mathfrak{w}} = (\langle \eta \cdot a | \tau \rangle)_{\mathfrak{w}} = \lim_{\alpha} (\langle x^{\alpha} \cdot a | \tau \rangle)_{\mathfrak{w}} =$$

$$\lim_{\alpha} U_{\mathfrak{w}}^W(\tau) * (x^{\alpha} \cdot a)_{\mathfrak{w}} = \lim_{\alpha} U_{\mathfrak{w}}^W(\tau) * U_{\mathfrak{w}}^W(x^{\alpha})(a)_{\mathfrak{w}} =$$

$$U_{\mathfrak{w}}^W(\tau) * U_{\mathfrak{w}}^W(\eta)(a)_{\mathfrak{w}}, \text{ also}$$

$$U_{\mathfrak{w}}^W(\tau) * U_{\mathfrak{w}}^W(\eta) = \pi_{\mathfrak{w}}^W(\langle \eta | \tau \rangle).$$

Die weiteren Aussagen über $U_{\mathfrak{w}}^W$ sind unmittelbar klar. ./.

Als nächstes bilden wir die l^2 -direkte Summe aller Darstellungen $\{U_{\mathfrak{w}}^W, \pi_{\mathfrak{w}}^W\}$:

Mit $\Lambda := \{\mathfrak{w} \in G^* \mid \mathfrak{w} \text{ positiv}\}$ und den Bezeichnungen aus Proposition (2.4) seien weiterhin

$$H := \sum_{\varphi \in \Lambda} \oplus G_{\varphi} \quad , \quad K := \sum_{\tau \in \Lambda} \oplus \mathfrak{H}_{\tau} \quad ,$$

$$\pi^W(A) := \sum_{\varphi \in \Lambda} \oplus \pi_{\varphi}^W(A) \quad \text{für } A \in G^{**} \quad ,$$

$$U^W(\tau) := \sum_{\varphi \in \Lambda} \oplus U_{\varphi}^W(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathfrak{H}'' \quad .$$

Es ist dann $\text{rest}_G \pi^W$ die universelle Sterndarstellung von G (s. [9], 1.17.2), $\pi^W(G^{**})$ stimmt mit dem schwachen Abschluß von $\pi^W(G)$ überein, und π^W ist eine Homöomorphie bezüglich $\sigma(G^{**}, G^*)$ und der schwachen Operator-topologie.

(2.5) Proposition $U^W : \mathfrak{H}'' \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$ ist eine lineare Isometrie, die

$$U^W(\tau \cdot A) = U^W(\tau) \pi^W(A) \quad ,$$

$$U^W(\eta) * U^W(\tau) = \pi^W(\langle \tau | \eta \rangle)$$

für alle $\tau, \eta \in \mathfrak{H}''$ erfüllt.

U^W ist homöomorph bezüglich der starken Topologie von $\mathfrak{H}''$ und der starken Operator-topologie von $U^W(\mathfrak{H}'')$. U^W ist homöomorph bezüglich $\sigma(\mathfrak{H}'', \mathfrak{H}''_*)$ und der schwachen Operator-topologie.

$U^W(\mathfrak{H})$ ist ein normabgeschlossener ternärer Operatorenring, dessen schwacher (und daher auch starker Abschluß) mit $U^W(\mathfrak{H}'')$ übereinstimmt.

Beweis: Offenbar gelten die ersten beiden Gleichungen, da sie nach (2.4) für jedes $\varphi \in \Lambda$ richtig sind. Es folgt für jedes $\tau \in \mathfrak{H}''$:

$$\|U^W(\tau)\|^2 = \|\pi^W(\langle \tau | \tau \rangle)\| = \|\tau\|^2 \quad ,$$

d.h. U^W ist eine Isometrie.

Sei $\{\tau_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{M}'$ ein Netz : $\{\tau_\alpha\}_\alpha$ konvergiert in $\mathfrak{M}'$ stark gegen 0 genau dann, wenn für alle positiven $\varphi \in \mathfrak{G}^*$ $0 = \lim_{\alpha} \varphi(\langle \tau_\alpha | \tau_\alpha \rangle)$ gilt, d.h.

genau dann, wenn $\{\langle \tau_\alpha | \tau_\alpha \rangle\}_\alpha$ in $\mathfrak{G}^{**}$ schwach* gegen 0 konvergiert; dies ist aber gleichwertig damit, daß $\{U^W(\tau_\alpha) * U^W(\tau_\alpha)\}_\alpha$ in $\mathcal{L}(H)$ schwach, also $\{U^W(\tau_\alpha)\}_\alpha$ in $\mathcal{L}(H, K)$ stark gegen 0 konvergiert. Daher ist U^W eine starke Homöomorphie.

(2.3) zeigt nun, daß $U^W(\mathfrak{M}')$ im starken Operatorabschluß von $U^W(\mathfrak{M})$ liegt, der wegen der Konvexität von $U^W(\mathfrak{M})$ mit dem schwachen Operatorabschluß von $U^W(\mathfrak{M})$ übereinstimmt.

Andererseits ist $U^W(\mathfrak{M}')$ schwach abgeschlossen: liegt nämlich X im schwachen Abschluß von $U^W(\mathfrak{M}')$, so gilt $X * U^W(\mathfrak{M}') \subset \pi^W(\mathfrak{G}^{**})$, d.h. durch

$$\tau \mapsto (\pi^W)^{-1}(X * U^W(\tau))$$

wird ein Element von $\text{Hom}_{\mathfrak{G}^{**}}(\mathfrak{M}', \mathfrak{G}^{**})$ definiert; wegen (2.2) existiert dann ein $\tau_0 \in \mathfrak{M}'$, das

$$\langle \tau | \tau_0 \rangle = (\pi^W)^{-1}(X * U^W(\tau)), \text{ , also}$$

$$U^W(\tau_0) * U^W(\tau) = X * U^W(\tau) \text{ .}$$

für alle $\tau \in \mathfrak{M}'$ erfüllt; es folgt, daß $U^W(\tau_0) *$ und $X *$ auf dem Normabschluß der linearen Hülle von

$\bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}'} U^W(\tau)(H)$, also auf K übereinstimmen.

Dies bedeutet $U^W(\tau_0) = X$.

(2.5.1) U^W ist auf normbeschränkten Teilmen-
gen von $\mathcal{M}'$ schwach stetig.

Denn für alle $\tau \in \mathcal{M}'$, $x \in \mathcal{M}$, $a \in G$, $\varphi \in \Lambda$
gilt $\langle (x)_\varphi | U^W(\tau)(a)_\varphi \rangle_K = \langle (x)_\varphi | (\tau \cdot a)_\varphi \rangle_{\mathcal{M}} =$
 $\varphi(a *_\tau(x))$.

(2.5.2) $(U^W)^{-1}$ ist schwach stetig.

Jedes $f \in \mathcal{M}'_*$ ist in der Form

$$f = f_1 + f_2 + i(f_3 + f_4)$$

darstellbar, wobei jedes f_k die Gestalt

$$f_k = \sum_{n \geq 1} x_n^{(k)} \otimes \varphi_n^{(k)}$$

mit gewissen $x_n^{(k)} \in \mathcal{M}$ und positiven $\varphi_n^{(k)} \in$

G^* besitzt, die $\sum_{n \geq 1} \|x_n^{(k)}\| \|\varphi_n^{(k)}\| \leq \infty$

genügen. Zu festem k setzen wir $y_n := x_n^{(k)}$,

$\psi_n := \varphi_n^{(k)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$X \mapsto \sum_{n \geq 1} \langle X(1)_{\psi_n} | (y_n)_{\psi_n} \rangle$$

ein schwach stetiges lineares Funktional auf
 $\mathcal{L}(H, K)$ (beachte, daß

$$\sum_{n \geq N} |\langle X(1)_{\psi_n} | (y_n)_{\psi_n} \rangle| \leq$$

$$\sum_{n \geq N} \|X\| \|(1)_{\psi_n}\| \|(y_n)_{\psi_n}\| \leq$$

$$\sum_{n \geq N} \|X\| \psi_n(1)^{1/2} \psi_n(\langle y_n | y_n \rangle)^{1/2} \leq$$

$$\sum_{n \geq N} \|x\| \|\psi_n\| \|y_n\| \rightarrow 0 \quad \text{mit } N \rightarrow \infty,$$

und es gilt für alle $\tau \in \mathcal{M}'$:

$$\sum_{n \geq 1} \langle U^W(\tau)(1)_{\psi_n} | (y_n)_{\psi_n} \rangle =$$

$$\sum_{n \geq 1} \langle (\tau \cdot 1)_{\psi_n} | (y_n)_{\psi_n} \rangle =$$

$$\sum_{n \geq 1} \psi_n(\langle \tau | y_n \rangle) =$$

$$\sum_{n \geq 1} (y_n \otimes \psi_n)(\tau) = f_k(\tau),$$

woraus unmittelbar (2.5.2) folgt.

(2.5.3) Für ein lineares Funktional f auf $\mathcal{M}'$ sind folgende Aussagen äquivalent:

f ist schwach stetig, f ist stark stetig, f ist auf der Einheitskugel von $\mathcal{M}'$ schwach stetig, f ist auf der Einheitskugel von $\mathcal{M}'$ stark stetig.

Sei $\Omega \subset \mathcal{M}'$ konvex und stark abgeschlossen.

Wie eingangs gezeigt, ist U^W eine starke Homöomorphie, so daß $U^W(\Omega)$ stark abgeschlossen in $\mathcal{L}(H, K)$ ist. Bekanntlich impliziert dies die schwache Abgeschlossenheit von $U^W(\Omega)$, und nach (2.5.2) ist dann Ω in $\mathcal{M}'$ schwach abgeschlossen.

Sei nun f auf der Einheitskugel von $\mathcal{M}'$

stark stetig; $\Omega := \{ \tau \mid \|\tau\| \leq 1, f(\tau) = 0 \}$

ist also eine konvexe, stark abgeschlossene Menge, daher schwach abgeschlossen, und nach dem Satz von Banach und Dieudonné gilt dies dann auch für $\text{Kern}(f)$. Daher ist f auf $\mathcal{M}'$ schwach stetig.

Mit Hilfe von (2.5.1), (2.5.2) ergibt sich nun unmittelbar die schwache Homöomorphie von U^W , und (2.5) ist vollständig bewiesen.
./.

(2.6) Korollar Die Einheitskugel von $\mathfrak{M}$ ist stark- und schwach dicht in der Einheitskugel von $\mathfrak{M}''$.

Beweis: Wir erkennen dies unter Zuhilfenahme des Satzes (3.4). Danach ist die Einheitskugel von $U^W(\mathfrak{M})$ in der Einheitskugel von $U^W(\mathfrak{M}'')$ dicht bezüglich der starken wie auch der schwachen Operator-topologie. Die entsprechenden Stetigkeitseigenschaften von U^W gemäß (2.5) zeigen nun die Behauptung.
./.

Zum Abschluß dieses Paragraphen betrachten wir noch kurz die Darstellung von Hilbertmoduln, welche über einer W^* -Algebra selbstdual sind (s. Definition (1.5)). Wir benötigen eine solche Darstellung im Beweis des Satzes (5.1) (s. S.65) .

Zu dieser Klasse selbstdualer Hilbertmoduln gehört speziell der Modul $\mathfrak{M}''$: nach (2.2) gilt

$$\mathfrak{M}'' = \text{Hom}_{G^{**}}(\mathfrak{M}', G^{**}) ,$$

so daß $\mathfrak{M}''$ (bis auf die konjugierte Skalarmultiplikation) der Dualraum von $\mathfrak{M}' \hat{\otimes}_{G^{**}} G^*$ ist (dies nach [7], 2.13).

Man sieht sofort, daß die eingangs definierte schwache Topologie von $\mathfrak{M}''$ schwächer als die von $\mathfrak{M}' \hat{\otimes}_{G^{**}} G^*$ herkommende schwach*Topologie ist und auf normbeschränkten Mengen mit dieser übereinstimmt.

In Paragraph 5 zeigen wir jedoch, daß ein ternärer W^* -Ring (und $\mathfrak{M}'$ versehen mit der ternären Operation $(\tau, \eta, \rho) \mapsto \tau \cdot \langle \rho | \eta \rangle$ ist ein solcher) einen eindeutig bestimmten Prädualraum besitzt. Daher verwenden wir auch weiterhin die auf S.4/5 eingeführte kanonische Form von $\mathfrak{M}'^*$ und bezeichnen damit die Gesamtheit aller von $\mathfrak{M} \hat{\otimes} G^*$ herkommenden (konjugiert-) linearen Funktionale auf $\mathfrak{M}'$.

Die folgende Proposition sieht man in gleicher Weise ein wie (2.5), so daß wir auf einen Beweis verzichten. Wir verwenden die Aussage als letzten Schritt im Beweis zu Satz (5.1).

(2.7) Proposition Sei G eine W^* -Algebra, sei $\mathfrak{M}$ ein selbstdualer Hilbertmodul über G .

Sei Λ die Menge aller positiven normalen Funktionale auf G , seien ferner

$$H := \sum_{\varphi \in \Lambda} G_{\varphi}, \quad K := \sum_{\varphi \in \Lambda} \mathfrak{M}_{\varphi},$$

$$V := \sum_{\varphi \in \Lambda} \text{rest}_{\mathfrak{M}} U_{\varphi}^W, \quad \pi := \sum_{\varphi \in \Lambda} \pi_{\varphi}.$$

Dann ist $V : \mathfrak{M} \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$ eine lineare Isometrie, die für alle $x, y \in \mathfrak{M}$ und $a \in G$

$$V(x \cdot a) = V(x) \pi(a),$$

$$V(y)^* V(x) = \pi(\langle x | y \rangle).$$

erfüllt. $V(\mathfrak{M})$ ist ein schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring.

V ist homöomorph bezüglich der von allen Seminormen

$$v \mapsto \omega(\langle x | x \rangle)^{1/2}, \quad \omega \in \Lambda$$

auf $\mathfrak{M}$ erzeugten starken Topologie und der starken
Operatortopologie auf $V(\mathfrak{M})$.

V ist homöomorph bezüglich der von $\mathfrak{M} \hat{\otimes}_{\mathbb{G}} \mathbb{G}_*$

auf $\mathfrak{M}$ erzeugten schwach*Topologie und der schwachen
Operatortopologie auf $V(\mathfrak{M})$.

§ 3. Einige Lemmata über ternäre Operatorenringe

In diesem Paragraphen beweisen wir grundlegende Aussagen über ternäre Operatorenringe, die wir zur Herleitung der Darstellungssätze (4.1) und (5.1) benötigen.

Gemäß (2.5) ist jeder Hilbertmodul $(\mathfrak{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ über einer C*-Algebra $\mathfrak{A}$ einem normabgeschlossenen ternären Operatorenring zwischen zwei Hilberträumen isometrisch isomorph.

Umgekehrt ist offenbar jeder normabgeschlossene ternäre Operatorenring $\mathfrak{T} \subset \mathcal{L}(H, K)$ ein (rechter) Hilbertmodul über der C*-Teilalgebra

$$[\mathfrak{T}]_H := \overline{\text{lin} \{ \mathfrak{T} \mathfrak{T}^* \}}^{\|\cdot\|}$$

von $\mathcal{L}(H)$, wenn man $(X, Y) \mapsto Y^*X$ als $[\mathfrak{T}]_H$ -wertiges inneres Produkt wählt. Analog erkennt man, daß $\mathfrak{T}$ versehen mit dem inneren Produkt $(X, Y) \mapsto XY^*$ einen (linken) Hilbertmodul über der C*-Teilalgebra

$$[\mathfrak{T}]_K := \overline{\text{lin} \{ \mathfrak{T} \mathfrak{T}^* \}}^{\|\cdot\|}$$

von $\mathcal{L}(K)$ bildet.

Die gleiche Situation hat man im Falle des schwachen Operatorabschlusses $\overline{\mathfrak{T}}^{\sigma}$ von $\mathfrak{T}$: $\overline{\mathfrak{T}}^{\sigma}$ ist ein ternärer Operatorenring wie auch ein Hilbertmodul über der W*-Algebra $\overline{[\mathfrak{T}]_H}^{\sigma}$ bzw. $\overline{[\mathfrak{T}]_K}^{\sigma}$.

In Paragraph 5 zeigen wir im Korollar (5.15), daß jeder schwach abgeschlossene ternäre Operatoren-

ring $\mathfrak{R}$ in $\mathcal{L}(H, K)$ als Hilbertmodul über $\overline{[\mathfrak{R}]_H}^\sigma$ bzw. $\overline{[\mathfrak{R}]_K}^\sigma$ selbstdual ist. Nach (2.7) besitzt andererseits jeder Hilbertmodul $(\mathfrak{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, der über der W^* -Algebra $\mathfrak{A}$ selbstdual ist, eine treue Darstellung als schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring zwischen Hilberträumen, so daß sich diese beiden Strukturen vollkommen entsprechen.

(3.1) Ein Beispiel für einen ternären Operatorenring liefert neben der Menge $\mathfrak{T}(H, K)$ bzw. $\mathcal{C}(H, K)$ aller endlichdimensionalen bzw. kompakten Operatoren von H nach K der Intertwining-Ring $\mathfrak{I}(\pi, \pi')$, der zu zwei Sterndarstellungen $\{\pi, H\}$ und $\{\pi', H'\}$ einer C^* -Algebra $\mathfrak{A}$ gehört: $\mathfrak{I}(\pi, \pi')$ besteht aus allen Operatoren $X: H \rightarrow H'$, die

$$X \pi(a) = \pi'(a) X \quad \forall a \in \mathfrak{A}$$

erfüllen. $\mathfrak{I}(\pi, \pi')$ ist schwachabgeschlossen. Man erkennt sofort, daß $\overline{[\mathfrak{I}(\pi, \pi')]_H}^\sigma$ bzw. $\overline{[\mathfrak{I}(\pi, \pi')]_K}^\sigma$ mit der Kommutantenalgebra von $\pi(\mathfrak{A})$ bzw. $\pi'(\mathfrak{A})$ in $\mathcal{L}(H)$ bzw. $\mathcal{L}(H')$ übereinstimmt.

Im weiteren sei nun $\mathfrak{R} \subset \mathcal{L}(H, K)$ ein fester, normabgeschlossener ternärer Operatorenring.

Als erstes wenden wir uns den in $\overline{\mathfrak{R}}^\sigma$ enthaltenen partiellen Isometrien zu. In $\overline{\mathfrak{R}}^\sigma$ sind diese ein Ersatz für Projektionen bzw. das Einselement; sie liefern uns zudem Polardarstellungen für Operatoren und lineare Funktionale.

Die Endomorphismentheorie wird im Rahmen von C^* -Algebren, die wir mit einer festen partiellen Isometrie assoziieren, auch für ternäre Operatorenringe

wirksam.

Die folgenden Aussagen prüft man unmittelbar nach.

(3.2) Sei $R \in \mathfrak{K}$ eine partielle Isometrie.

$E_R := R^*R$ bzw. $E_R' := RR^*$ ist die Träger- bzw. Bildprojektion von R . Wir setzen

$$\mathfrak{K}(R) := \{ X \in \mathfrak{K} \mid X = XE_R = E_R'X \}.$$

Mit $(X, Y) \mapsto XR^*Y$ als Multiplikation und mit $X \mapsto RX^*R$ als Involution ist $\mathfrak{K}(R)$ unter der Operatorennorm eine C^* -Algebra mit Eins R .

$X \mapsto R^*X$ ist ein isometrischer Sternisomorphismus von $\mathfrak{K}(R)$ auf die C^* -Teilalgebra $E_R(\overline{[\mathfrak{K}]_H})E_R$ von $\mathcal{L}(H)$.

Sei $\overline{\mathfrak{K}} := \overline{\mathfrak{K}}^\sigma$. Dann bildet $\overline{\mathfrak{K}}(R) = \overline{\mathfrak{K}(R)}^\sigma$ in der gleichen Weise eine W^* -Algebra:

$X \mapsto R^*X$ ist eine in beiden Richtungen bezüglich der schwachen Operatortopologie stetige Isomorphie von $\overline{\mathfrak{K}}(R)$ auf die W^* -Algebra $E_R(\overline{[\overline{\mathfrak{K}]}_H}^\sigma)E_R$.

Wir nennen $\mathfrak{K}(R)$ die mit R (in $\mathfrak{K}$) assoziierte C^* -Algebra (bzw. W^* -Algebra, falls $\mathfrak{K}$ schwach abgeschlossen ist).

(3.3) Proposition Sei $X \in \mathfrak{K}$, sei R die partielle Isometrie der Polardarstellung $X = R(X^*X)^{1/2}$ von X in $\mathcal{L}(H, K)$. Dann gilt:

(a) Die von X in $\mathcal{L}(H, K)$ erzeugte C^* -Algebra ist (mengenmäßig) gleich dem von X erzeugten normabgeschlossenen ternären Ring.

(b) Die von X in $\mathcal{L}(H,K)_{(R)}$ erzeugte W^* -Algebra ist gleich dem von X erzeugten schwach abgeschlossenen ternären Ring.

Insbesondere gehört R zu $\overline{\mathfrak{T}}^\sigma$.

Beweis: Sei $\mathbb{C}[t]$ der Polynomring über den komplexen Zahlen, sei $\mathbb{C}_0[t]$ die Menge aller $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $p(0) = 0$. Sei $|X| := (X^*X)^{1/2}$.

$\overline{\{p(|X|) \mid p \in \mathbb{C}_0[t]\}}^{\text{""}}$ ist die von $|X|$ erzeugte C^* -Algebra, und diese liegt in $[\mathfrak{T}]_H$. Ihre Erweiterung mit der Eins E_R ist dann im schwachen Abschluß von $[\mathfrak{T}]_H$ enthalten (man beachte, daß E_R auch der Träger von X ist) und hat mit $X^0 := E_R$ die Form $\overline{\{p(|X|) \mid p \in \mathbb{C}[t]\}}^{\text{""}}$.

Zu $p \in \mathbb{C}[t]$ sei $p_R(X)$ das in der Sternalgebra $\mathcal{L}(H,K)_{(R)}$ gebildete Polynom in X . Es gilt dann für alle $p \in \mathbb{C}[t]$

$$Xp(|X|) = Xp(R^*X) = XR^*p_R(X) = (tp)_R(X).$$

Dies impliziert (*) :

$$\overline{\{p_R(X) \mid p \in \mathbb{C}_0[t]\}}^{\text{""}} = \overline{\{Xp(|X|) \mid p \in \mathbb{C}[t]\}}^{\text{""}},$$

wobei die hier rechts stehende Menge in $\mathfrak{T}$ enthalten ist.

Sei nun $\mathfrak{I}$ der von X erzeugte normabgeschlossene ternäre Ring. Wegen $|X| \in [\mathfrak{I}]_H$ und der Inklusion $\mathfrak{I} \cdot [\mathfrak{I}]_H \subset \mathfrak{I}$ folgt zusammen mit (*), daß

$\mathfrak{I}' := \overline{\{p_R(X) \mid p \in \mathbb{C}_0[t]\}}^{\text{""}}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{I}$ ist. Andererseits bildet $\mathfrak{I}'$ einen normabgeschlosse-

nen ternären Ring (so hat man z.B. nach (3.1)

$$p_R(X)q_R(X)*r_R(X) = (p\bar{q}r)_R(X)$$

für alle $p, q, r \in \mathbb{C}_0[t]$, der X enthält, so daß $r' = r$ gilt.

Analog folgt die Behauptung in (b): $\bar{I}^\sigma =$

$$\overline{\{Xp(|X|) \mid p \in \mathbb{C}[t]\}}^\sigma = \overline{\{p_R(X) \mid p \in \mathbb{C}_0[t]\}}^\sigma.$$

Die Eins dieser W^* -Teilalgebra von $\mathcal{L}(H, K)_{(R)}$ ist eine Projektion in $\mathcal{L}(H, K)_{(R)}$ und daher eine partielle Isometrie $S \in \mathcal{L}(H, K)$, die

$$E_S^*X = SS^*X = SR^*X = X \quad \text{und} \quad X = XE_S$$

erfüllt. Es folgt also $E_S^* \geq E_R^*$, $E_S \geq E_R$, und da-

mit $S = R$. Dies impliziert $R \in \bar{I}^\sigma$, also $R \in \bar{\mathcal{K}}^\sigma$.
./.

Die folgende Proposition charakterisiert die Extremalpunkte der Einheitskugel von $\mathcal{K}$ als eine gewisse Klasse partieller Isometrien des Ringes. Mit Hilfe dieser Aussage gewinnen wir in (5.4) eine Polardarstellung für die schwach* stetigen Funktionale eines ternären W^* -Ringes.

(3.4) Proposition Sei $D_1(\mathcal{K})$ die Einheitskugel von $\mathcal{K}$. Für $X \in D_1(\mathcal{K})$ sind äquivalent:

- (a) X ist ein Extremalpunkt von $D_1(\mathcal{K})$.
- (b) X ist eine partielle Isometrie mit
(1 - XX^*) $\mathcal{K}$ (1 - X^*X) = {0}.
- (c) (1 - XX^*) $\mathcal{K}$ (1 - X^*X) = {0}.

Beweis: Sei E_X bzw. E_X^1 die Träger- bzw. die Bildprojektion von X . Es gilt stets

$$(1 - E_X^1) \mathfrak{R} (1 - E_X) = \{ Y \in \mathfrak{R} \mid 0 = Y*X, 0 = YX* \}.$$

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei R die partielle Isometrie der Polardarstellung $X = R(X*X)^{1/2}$ von X . Nach (3.3) ist der von X in $\mathfrak{R}$ erzeugte normabgeschlossene ternäre Ring $\mathfrak{T}$ durch $Y \mapsto R*Y$ zu der von $|X| = (X*X)^{1/2} = R*X$ erzeugten C^* -Algebra isomorph. Nach [9], 1.6.2 ist daher $|X|$ eine Projektion. Offenbar gilt $|X| = E_X$, d.h. X ist eine partielle Isometrie.

Außerdem folgt für jedes Y aus der Einheitskugel von $(1 - E_X^1) \mathfrak{R} (1 - E_X)$

$$\|Y + X\|^2 = \|(Y + X)*(Y + X)\| = \|Y*Y + X*X\| =$$

$$\text{Max}\{ \|Y\|^2, \|X\|^2 \} \leq 1,$$

also $Y + X \in D_1(R)$ und daher $Y = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Aus $0 = (1 - XX*)X(1 - X*X)$ folgt $0 = X*X(1 - X*X)$, weshalb $X*X$ eine Projektion ist.

Seien dann $Y, Z \in D_1(\mathfrak{R})$ mit $X = (Y + Z)/2$ gewählt. Setzt man $E' := E_X^1 = XX^*$ und $E := E_X = X*X$, so gilt $X = (E'YE + E'ZE)/2$.

$E'YE$ und $E'ZE$ sind Elemente der Einheitskugel der C^* -Algebra $\mathfrak{R}_{(X)}$. Dies impliziert zunächst

$$X = E'YE = E'ZE.$$

Ferner erkennt man, daß

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|YE\|^2 = \|(E'YE + (1-E')YE)^*(E'YE + (1-E')YE)\| = \\ &\|X*X + ((1-E')YE)^*((1-E')YE)\| \geq 1 + \|(1-E')YE\|^2 \end{aligned}$$

gilt, woraus sich $E'YE = YE$ ergibt.

Analog folgt auch $E'ZE = ZE$, insgesamt also

$$X = YE = ZE.$$

Durch die gleichen Schlüsse in $\mathcal{L}(K)$ an Stelle von $\mathcal{L}(H)$ sieht man $X = E'Y = E'Z$.

Die letzten Gleichungen liefern nun

$$Y = YE + Y(1-E) = X + E'Y(1-E) + (1-E')Y(1-E) = X$$

und ebenso $Z = X$.
./.

Das nächste Resultat ist ein Dichtesatz vom KAPLANSKY'schen Typ. Dieser Satz wurde bereits in (2.5) verwendet und geht auch in Paragraph 5 noch ein. Zum Beweis übertragen wir bekannte Schlußweisen geeignet in die vorliegende Situation.

(3.5) Satz Die Einheitskugel von $\mathfrak{K}$ ist schwach dicht (und damit auch stark dicht) in der Einheitskugel des schwachen Abschlusses $\overline{\mathfrak{K}}^\sigma$ von $\mathfrak{K}$.

Beweis: Zunächst gilt $\text{OBdA } H = K$, wobei wir zudem annehmen können, daß $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{E} := \overline{\mathfrak{K}}^\sigma$ in $\mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert sind:

Sei nämlich $\tilde{\mathfrak{T}}$ die Menge der Operatoren aus

$\mathcal{L}(H \oplus K)$, die von der Form $\begin{pmatrix} 0 & Y^* \\ X & 0 \end{pmatrix}$ mit X, Y

aus $\mathfrak{K}$ sind. Man überzeugt sich sofort davon,

daß $\tilde{\mathfrak{T}}$ ein selbstadjungierter normabgeschlossener ternärer Operatorenring in $\mathcal{L}(H \oplus K)$ ist und

daß $X \mapsto \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ X & 0 \end{pmatrix}$ eine reell-lineare Isometrie und schwache Homöomorphie von $\mathfrak{K}$ auf den selbst-

adjungierten Teil $\tilde{\mathfrak{K}}_{sa}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}$ darstellt. Ferner gilt $\tilde{\mathfrak{C}} = \overline{\tilde{\mathfrak{K}}}^{\sigma}$. Hat man nun gezeigt, daß $\tilde{\mathfrak{C}}_{sa}$ bzw. $D_1(\tilde{\mathfrak{C}}_{sa})$ im schwachen Abschluß von $\tilde{\mathfrak{K}}_{sa}$ bzw. $D_1(\tilde{\mathfrak{K}}_{sa})$ enthalten ist, so folgt der allgemeine Fall.

(3.5.1) Ist $A = A^* \in \mathcal{L}(H)$ und bezeichnet $\mathfrak{r}$ den von A erzeugten normabgeschlossenen ternären Ring, so gibt es ein $A' \in \mathfrak{r}_{sa}$ mit $A = 2A'(1+A'^2)^{-1}$.

Denn sei $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(t) := 2t/(1+t^2)$; f ist stetig und streng monoton steigend mit $f(0) = 0$; das gleiche gilt für die Umkehrfunktion g von f . In der Notation von (3.3) ist $\mathfrak{r}$ die von A in $\mathcal{L}(H)_{(R)}$ erzeugte C^* -Algebra. Bezeichnet man deren Funktionalkalkül mit $\chi \mapsto \chi_R(A)$, so gilt

$$A' := g_R(A) \in \mathfrak{r}, \quad f_R(A') = A.$$

Wegen $g \geq 0$ ist A' in der C^* -Algebra $\mathfrak{r}$ positiv. Daher ist R^*A' in $\mathcal{L}(H)$ positiv.

Da A selbstadjungiert ist, existieren zwei orthogonale Projektionen E, F mit $EF = 0$ und $R = E - F$.

Außerdem gilt $RA = AR$, so daß $\mathfrak{r}$ in $\mathcal{L}(H)$ elementweise mit R kommutiert. Es folgt $A'R = RA'$. Da $A'R$ in $\mathcal{L}(H)$ positiv ist, folgt $A' = A'^*$.

Schließlich sieht man mit Hilfe von (3.3)

$$A = f_R(A') = R f(RA') =$$

$$R \left(2RA' \left[1 + R^2 A'^2 \right]^{-1} \right) = 2A' (1 + A'^2)^{-1}.$$

Wir setzen nun $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_{sa}$, $\mathfrak{B} := (\overline{\mathfrak{A}}^{\sigma})_{sa}$.

Wegen der schwachen Stetigkeit von $A \mapsto (A+A^*)/2$ gilt $\mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{A}}^{\sigma}$.

Sei weiter $A \in D_1(\mathfrak{B})$:

nach (3.5.1) gibt es ein selbstadjungiertes $A' \in \mathfrak{A}$ mit $A = 2A'(1 + A'^2)^{-1}$.

Zu beliebigem $B' \in \mathfrak{B}$ sei $B := 2B'(1 + B'^2)^{-1}$;
es gelten dann $B \in \mathfrak{B}$ und

$$\frac{1}{2}(A-B) = (1+B'^2)^{-1}((A'-B') + B'(B'-A')A')(1+A'^2)^{-1}.$$

Wegen $A' \in \mathfrak{A}$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{A}$ im starken Abschluß von $\mathfrak{B}$ enthalten ist, gibt es ein Netz $\{B'_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{A}$, das stark gegen A' konvergiert. Da die Operatoren $(1 + B'^2_\alpha)^{-1}$ und B_α eine Norm ≤ 1 besitzen, konvergiert $\{B_\alpha\}_\alpha$ stark gegen A , so daß A im starken Abschluß von $D_1(\mathfrak{B})$ liegt, was zu zeigen war.
./.

Die letzten Aussagen zeigen, daß schwachabgeschlossene ternäre Operatorenringe manche starke Eigenschaft besitzen, die man von W^* -Algebren her kennt.

Eine weitere Analogie zwischen beiden besteht darin, daß die schwach abgeschlossenen Ideale des Ringes $\overline{\mathfrak{A}}^{\sigma}$ mit Hilfe der Projektionen der Algebra $[\overline{\mathfrak{A}}]_H^{\sigma}$ bzw. $[\overline{\mathfrak{A}}]_K^{\sigma}$ charakterisiert werden können. Ein Resultat dieses Typs ist das folgende Lemma, welches wir im Beweis von (5.1) benötigen.

(3.6) Lemma Sei $\mathfrak{M}$ ein schwach abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von $\overline{\mathfrak{M}}^\sigma$, ein linearer Teilraum also, der $\overline{\mathfrak{M}}^\sigma = \mathfrak{M} \supset \mathfrak{M} * \mathfrak{M} \cup \mathfrak{M} * \mathfrak{M}$ erfüllt.

Dann gibt es (eindeutig bestimmte) zentrale Projektionen $E \in [\overline{\mathfrak{M}}]_H^\sigma$ und $E' \in [\overline{\mathfrak{M}}]_K^\sigma$ so, daß $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^\sigma E = E' \overline{\mathfrak{M}}^\sigma$ gilt.

Beweis: Seien $\mathfrak{A} := [\overline{\mathfrak{M}}]_H^\sigma$ und $\mathfrak{B} := [\overline{\mathfrak{M}}]_H^\sigma$. Offenbar gilt $\mathfrak{M} \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}$.

Sei $\mathfrak{L} := \{ A \in \mathfrak{A} \mid \overline{\mathfrak{M}}^\sigma A \subset \mathfrak{M} \}$ der Quotient von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{L}$ ein schwach abgeschlossenes zweiseitiges Ideal der W^* -Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{L}(H)$, so daß eine zentrale Projektion $E \in \mathfrak{A}$ existiert mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} E$. Wegen

$$\mathfrak{M} \mathfrak{M} * \mathfrak{M} \subset (\mathfrak{M} \mathfrak{M} *) \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$$

gilt $\mathfrak{M} * \mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$, also $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{L}$.

Nach Definition von $\mathfrak{L}$ hat man $\overline{\mathfrak{M}}^\sigma \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$, und dies impliziert nun

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \mathfrak{B} \subset \overline{\mathfrak{M}}^\sigma \mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}, \text{ also } \mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^\sigma \mathfrak{L}.$$

Es folgt $\mathfrak{M} = \overline{\mathfrak{M}}^\sigma \mathfrak{A} E = \overline{\mathfrak{M}}^\sigma E$.

Die zentrale Projektion E' mit $\mathfrak{M} = E' \overline{\mathfrak{M}}^\sigma$ findet man analog.
./.

§4. Der Darstellungssatz für ternäre C*-Ringe

(4.1) Satz Sei $(\mathfrak{I}, (., ., .), \|\cdot\|)$ ein ternärer C*-Ring.

Es existiert genau eine Zerlegung

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ \oplus \mathfrak{I}_-$$

von $\mathfrak{I}$ in zwei normabgeschlossene ternäre Unterringe $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ so, daß $\mathfrak{I}_+$ bzw. $\mathfrak{I}_-$ zu einem ternären Operatorenring isomorph bzw. antiisomorph ist,

d.h. so, daß es Hilberträume H_+, K_+ bzw. H_-, K_- und eine lineare Isometrie $U_+ : \mathfrak{I}_+ \rightarrow \mathcal{L}(H_+, K_+)$ bzw. $U_- : \mathfrak{I}_- \rightarrow \mathcal{L}(H_-, K_-)$ gibt derart, daß

$$U_+((x, y, z)) = U_+(x)U_+(y)*U_+(z)$$

bzw.

$$U_-((x, y, z)) = - U_-(x)U_-(y)*U_-(z)$$

für alle x, y, z aus $\mathfrak{I}_+$ bzw. $\mathfrak{I}_-$ gilt.

Bezeichnet P die zur Zerlegung $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ \oplus \mathfrak{I}_-$ gehörige Projektion von $\mathfrak{I}$ auf $\mathfrak{I}_+$, so ist $2P - 1$ der eindeutig bestimmte Operator $T : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}$ mit $T^2 = 1$ und

$$T((x, y, z)) = (Tx, y, z) = (x, Ty, z) = (x, y, Tz)$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$, so daß Hilberträume H, K und eine lineare Isometrie $U : \mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$ existieren, die

$$U \cdot T((x, y, z)) = U(x)U(y)*U(z)$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$ erfüllen.

(4.2) Korollar Sei $(\mathfrak{I}, (.,.,.), \|\cdot\|)$ ein ternärer C*-Ring.

Mit dem Operator T aus Satz (4.1) ist dann durch

$$(.,.,.)_T := T \circ (.,.,.)$$

eine ternäre Operation auf $\mathfrak{I}$ gegeben so, daß $(\mathfrak{I}, (.,.,.)_T, \|\cdot\|)$ einem normabgeschlossenen ternären Operatorenring zwischen zwei Hilberträumen isometrisch isomorph ist.

Der Beweis von Satz (4.1) verläuft wie folgt:

Wir erkennen, daß die Menge der Operatoren

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &\rightarrow \mathfrak{I} & , & & x, y \in \mathfrak{I} \\ a &\mapsto (a, x, y) \end{aligned}$$

eine C*-Algebra $\mathfrak{G}$ erzeugt, welche antiisomorph (d.h. mit umgedrehter Multiplikation) in $\mathcal{L}(\mathfrak{I})$ enthalten ist. Dazu definiert

$$\alpha(x, y) := (., y, x)$$

eine $\mathfrak{G}$ -Form auf $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$, und $\mathfrak{I}$ zerfällt in die α -orthogonale direkte Summe

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ \oplus \mathfrak{I}_-$$

zweier ternärer C*-Unterringe $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$, die als

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_+ &= \{ x \in \mathfrak{I} \mid \alpha(x, x) \geq 0 \} \quad \text{und} \\ \mathfrak{I}_- &= \{ x \in \mathfrak{I} \mid \alpha(x, x) \leq 0 \} \end{aligned}$$

gegeben sind. Setzt man

$$\alpha_+ := \text{rest}_{\mathfrak{I}_+ \times \mathfrak{I}_+} \alpha, \quad \alpha_- := \text{rest}_{\mathfrak{I}_- \times \mathfrak{I}_-} \alpha,$$

so sind damit zwei Hilbertmoduln $(\mathfrak{I}_+, \alpha_+)$ und

$(\mathfrak{I}, \alpha)$ über G konstruiert, die nach (2.5) als normabgeschlossene ternäre Operatorenringe zwischen Hilberträumen darstellbar sind.

Im Verlaufe des Beweises betrachten wir in (4.5) die C^* -Algebra $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{I})$ der bezüglich α adjungierbaren Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathfrak{I})$ und konstruieren eine Form

$$b : \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{I})$$

der gleichen Art wie α , die

$$b(x, y) \cdot z = (x, y, z) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{I}$$

erfüllt. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ mit der Opposite Algebra der Multiplier Algebra von G übereinstimmt (s. (4.5)).

Durch ein Ausweichen von α auf b , d.h. durch die Tatsache, daß $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{I})$ und $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{I})$ elementweise miteinander kommutieren, können wir dann den letzten wichtigen Beweisschritt (4.8) vornehmen.

Der erste Schritt im Beweis zu Satz (4.1) ist die folgende Konstruktion des Paares (G, α) .

(4.3)Satz Sei $(\mathfrak{I}, (., ., .), \|\cdot\|)$ ein ternärer
 C^* -Ring.

Dann existiert genau ein Paar (G, α) derart,
daß gelten:

(a) G ist eine C^* -Algebra, und $\mathfrak{I}$ ist ein
rechter Banachmodul über G .

(b) α ist eine hermitesche G -Form auf
 $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$, d.h. es gilt für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$ und $a \in G$

$$\alpha(x \cdot a + y, z) = \alpha(x, z)a + \alpha(y, z),$$

$$\alpha(x, y)^* = \alpha(y, x).$$

(c) α ist stetig mit $\|\alpha\| \leq 1$.

(d) α erzeugt die ternäre Operation $(.,.,.)$, d.h. es gilt für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}$

$$(x, y, z) = x \cdot \alpha(z, y).$$

(e) $\text{lin} \{ \alpha(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}) \}$ ist normdicht in G .

Insbesondere ist dann α normerzeugend für $\mathfrak{X}$:

$$\|x\|^2 = \|\alpha(x, x)\| \quad \forall x \in \mathfrak{X}.$$

Beweis: Punkt (f) ergibt sich unmittelbar aus (a), (c) und (d): zu $x \in \mathfrak{X}$ hat man nämlich

$$\|x\|^3 = \|x \cdot \alpha(x, x)\| \leq \|x\| \|\alpha(x, x)\| \leq \|x\|^3.$$

Kommen wir nun zum Beweis der Existenz von G und α .

Zu jedem Paar $x, y \in \mathfrak{X}$ ist $a \mapsto (a, x, y)$ ein Operator $(., x, y)$ aus $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, dessen Norm $\|x\| \|y\|$ nicht übersteigt.

Sei V die lineare Hülle aller Operatoren $(., x, y)$, $x, y \in \mathfrak{X}$, in $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

V ist eine Teilalgebra von $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$:

denn für alle $a \in \mathfrak{X}$ gilt

$$((a, x_1, y_1), x_2, y_2) = (a, (x_2, y_1, x_1), y_2),$$

und dies bedeutet gerade, daß

$$(., x_2, y_2) \circ (., x_1, y_1) = (., (x_2, y_1, x_1), y_2).$$

Eine Involution $\dagger$ auf V ist gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n (., x_i, y_i) \mapsto \sum_{i=1}^n (., y_i, x_i) :$$

denn sei $\mathfrak{I} := \sum_{i=1}^n (., x_i, y_i)$ der Nulloperator;

dann gilt für $\mathfrak{I}' := \sum_{i=1}^n (., y_i, x_i)$ und $x \in \mathfrak{X}$:

$$\begin{aligned}
 (\ell'x, \ell'x, \ell'x) &= \\
 \sum_{i,j,k} ((x, y_i, x_i), (x, y_j, x_j), (x, y_k, x_k)) &= \\
 \sum_{i,j,k} (x, ((x, y_j, x_j), x_i, y_i), (x, y_k, x_k)) &= \\
 \sum_{j,k} (x, \sum_i ((x, y_j, x_j), x_i, y_i), (x, y_k, x_k)) &= \\
 \sum_{j,k} (x, \ell(x, y_j, x_j), (x, y_k, x_k)) &= 0,
 \end{aligned}$$

d.h. auch ℓ' ist der Nulloperator.

Daher ist j auf V wohldefiniert. Offenbar ist j konjugiert-linear und involutorisch.

Ferner gilt für $\ell_1 := (., x_1, y_1)$ und

$$\ell_2 := (., x_2, y_2) :$$

$$\begin{aligned}
 j(\ell_2 \circ \ell_1)x &= j((., (x_2, y_1, x_1), y_2)x = \\
 (x, y_2, (x_2, y_1, x_1)) &= ((x, y_2, x_2), y_1, x_1) = \\
 j(\ell_1) \circ j(\ell_2)x &\quad \forall x \in \mathfrak{X},
 \end{aligned}$$

d.h. j ist antimultiplikativ.

Die Operatorennorm von $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ genügt nun auf V der C*-Bedingung:

$$\text{denn für } \ell := \sum_{i=1}^n (., x_i, y_i) \text{ sieht man}$$

$$\|\ell x\|^2 = \|(\ell x, \ell x, \ell x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n ((x, x_i, y_i), \ell x, \ell x) \right\| =$$

$$\left\| \sum_{i=1}^n (x, (\ell x, y_i, x_i), \ell x) \right\| = \| (x, j(\ell)\ell x, \ell x) \| \leq$$

$$\leq \|x\| \|j(\ell)\ell x\| \|\ell x\| \leq \|x\|^2 \|j(\ell) \circ \ell\| \|\ell x\| \quad \forall x \in \mathfrak{X},$$

$$\text{also } \|\ell\|^2 \leq \|j(\ell) \circ \ell\|.$$

Daher ist V unter j und der Operatorennorm eine Prä-C*-Algebra.

Sei $\mathcal{G}$ die zum Normabschluß von V in $\mathcal{L}(\mathfrak{I})$ gehörige Opposite Algebra.

$\mathcal{G}$ ist eine C*-Algebra, und $\mathfrak{I}$ wird zu einem rechten Banachmodul über $\mathcal{G}$ vermöge

$$x \cdot a := a(x) \quad \forall x \in \mathfrak{I}, a \in \mathcal{G}.$$

Wir definieren eine hermitesche $\mathcal{G}$ -Form α auf $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ durch $\alpha(x, y) := (., y, x)$:

α hat dann die geforderten Linearitätseigenschaften und ist offenbar hermitesch und stetig; ferner gilt für $a := \alpha(x_1, y_1)$ und alle

$$x, y, z \in \mathfrak{I}$$

$$x \cdot \alpha(y \cdot a, z) = (x, z, y \cdot a) = (x, z, (y, y_1, x_1)) =$$

$$((x, z, y), y_1, x_1) = (x, z, y) \cdot a = x \cdot \alpha(y, z) \cdot a.$$

Da der Normabschluß von $\text{lin} \{ \alpha(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \}$ mit $\mathcal{G}$ übereinstimmt, ist $\mathfrak{I}$ treu über $\mathcal{G}$, also $\alpha(x \cdot a, y) = \alpha(x, y) a$.

Damit folgt die Existenzaussage des Satzes.

Zum Beweis der Eindeutigkeit seien $\mathfrak{B}$ eine C*-Algebra und $b : \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Form so, daß $(\mathfrak{I}, b, \mathfrak{B})$ sinngemäß den Punkten (a) bis (e) genügt.

Sei $m : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{I})$ der durch die Moduloperation von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{I}$ gegebene Antihomomorphismus.

Mit (d) folgt dann

$$m(b(x, y)) = \alpha(x, y) \quad \forall x, y \in \mathfrak{I}.$$

Wegen (e) operiert $\mathfrak{B}$ außerdem treu auf $\mathfrak{I}$, so daß m injektiv ist.

$$\text{Aus (e) folgt } m(\mathfrak{B}) = m\left(\overline{\text{lin} \{ b(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) \} }^{\|\cdot\|} \right) \subset$$

$$c \overline{\text{lin} \{ m(b(x,x)) \} }^{''''} = G .$$

Daß m sterntreu ist, entnimmt man der Gleichungskette

$$m(b(x,y)^*) = a(y,x) = a(x,y)^* = m(b(x,y))^* \\ \forall x,y \in \mathfrak{X} .$$

Beachtet man noch $m(\text{lin} \{ b(x,x) \}) = V$, so ist klar, daß m einen isometrischen Sternisomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf G darstellt, der b in a überführt.
./.

Sei für das weitere nun $(\mathfrak{X},(.,.,.)\|.\|)$ ein fester ternärer C*-Ring.

Seien G die C*-Algebra und $a : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow G$ die hermitesche Form, welche gemäß Satz (4.3) zu diesem Ring gehören.

Unsere Betrachtungen gelten zunächst der C*-Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$ derjenigen Operatoren, die bezüglich a adjungierbar sind.

Analoga der C*-Algebra $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$ treten für den Fall eines positiven G -wertigen inneren Produktes sowohl bei PASCHKE [5], [6] wie auch der Arbeit von RIEFFEL [8] auf. Wir können jedoch Aussagen von dort nicht ohne weiteres übernehmen, da die von uns betrachtete Form a nicht positiv ist.

(4.4) Existiert zu einer Abbildung F von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}$ eine Abbildung G von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}$ derart, daß

$$a(F(x),y) = a(x,G(y)) \quad \forall x,y \in \mathfrak{X}$$

gilt, so sind F und G beides normstetige G -Mo-

dulhomomorphismen auf $\mathfrak{X}$, und G ist durch F eindeutig bestimmt.

Wir nennen F dann adjungierbar bezüglich α und bezeichnen G als die (α) -Adjungierte F^* von F .

Sei $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ die Sternalgebra aller bezüglich α adjungierbaren Operatoren von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}$.

Mit Hilfe von Satz (4.3) sieht man leicht, daß $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ unter der Operatornorm eine C^* -Algebra mit Eins $1 = id_{\mathfrak{X}}$ ist. Ferner bildet $\mathfrak{X}$ in der üblichen Weise einen linken Banachmodul über $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$.

(4.5) Proposition Durch den Ansatz

$$b(x, y) : z \mapsto x \cdot \alpha(z, y)$$

wird eine hermitesche, stetige und normerzeugende Form $b : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ definiert.

Sei $\mathfrak{B}$ die von $b(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ in $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ erzeugte C^* -Algebra, sei $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ die C^* -Algebra der bezüglich b adjungierbaren Operatoren von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{X}$.

Dann gelten:

(a) $\mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ ist die Multiplier Algebra $M(\mathfrak{B})$ von $\mathfrak{B}$.

(b) Die analog dem Prozeß $a \rightsquigarrow b$ zu b konstruierte Form $c : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ stimmt mit α überein. $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ ist dabei gerade die Multiplier Algebra der Opposite Algebra G_{opp} von G .

Bezeichnet Ω' den Kommutator einer Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, so haben wir das Schema

$$\begin{array}{c}
 a : \mathfrak{A}_a(\mathfrak{I}) = M(a) \subset \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})' \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \begin{array}{c} b \\ a \end{array} \quad \mathfrak{I} \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 \mathfrak{G}_{\text{opp}} \subset \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I}) = M(\mathfrak{G}_{\text{opp}}) \subset \mathfrak{A}_a(\mathfrak{I})'
 \end{array}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß b die behaupteten Eigenschaften besitzt:

Offenbar ist $b(x,y) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{I})$ mit einer Norm nicht größer als $\|x\| \|y\|$. Wegen

$$a(b(x,y) \cdot z_1, z_2) = a(x \cdot a(z_1, y), z_2) =$$

$$a(x, z_2) a(z_1, y) = a(z_1, b(y, x) \cdot z_2)$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathfrak{I}$$

gehört $b(x,y)$ zu $\mathfrak{A}_a(\mathfrak{I})$ und erfüllt

$b(x,y)^* = b(y,x)$. Ist $F : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}$ ein beliebiger stetiger $\mathfrak{A}$ -Modulhomomorphismus auf $\mathfrak{I}$, so gilt

$$b(F(x), y) \cdot z = F(x) \cdot a(z, y) = F(x \cdot a(z, y)) =$$

$$F(b(x, y) \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{I}.$$

Insbesondere ersieht man aus dem letzten, daß $\mathfrak{A}$ ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{A}_a(\mathfrak{I})$ darstellt.

Bildet man nun zu dem System $(\mathfrak{I}, b, a)$ die Form $c : \mathfrak{I} \times \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$, so ergibt sich

$$c(x, y) \cdot z = b(z, y) \cdot x = z \cdot a(x, y) =$$

$$a(x, y)(z) \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{I},$$

und dies bedeutet $c = a$.

Insbesondere ist die von $c(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ erzeugte C^* -Algebra das antihomomorphe Bild $\mathfrak{G}_{\text{opp}}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{L}(\mathfrak{I})$.

Also ist G_{opp} ein zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$. Wir zeigen, daß $M(G_{\text{opp}}) = \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ gilt:

Denn seien $G_{\sim} := G_{\text{opp}}$ und $\mathfrak{A}_{\sim} := \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$.

Die Inklusionsabbildung $G_{\sim} \rightarrow M(G_{\sim})$ ist auf genau eine Weise zu einem Sternhomomorphismus $\mu : \mathfrak{A}_{\sim} \rightarrow M(G_{\sim})$ fortsetzbar (s.

BUSBY [1], 3.7). Der Kern von μ stimmt dabei gerade mit dem Annihilator von $G_{\sim}$ in $\mathfrak{A}_{\sim}$

überein; im vorliegenden Falle ist dieser Annihilator gleich $\{0\}$:

sei $F \in \mathfrak{A}_{\sim}$ mit $F G_{\sim} = \{0\}$, dann gilt für alle $x \in \mathfrak{I}$ und $a \in G$ $F(x \cdot a) = 0$, so daß

$$\begin{aligned} 0 &= b(F(x \cdot a), y) \cdot z = b(x \cdot a, F^*(y)) \cdot z = \\ &= x \cdot a \circ (z, F^*(y)) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$ und $a \in G$ folgt, was wiederum $a \circ (z, F^*(y)) = 0$ für alle $a \in G$ zur Folge hat und so auf $F = 0$ führt.

Daher ist μ ein Monomorphismus.

Zu zeigen bleibt, daß $\mathfrak{A}_{\sim}$ in der von $G_{\sim}$ erzeugten strikten Topologie vollständig ist (s. wieder [1], 3.7).

Sei dazu $\{F_{\alpha}\}_{\alpha} \subset \mathfrak{A}_{\sim}$ ein striktes Cauchynetz; dies bedeutet

$$0 = \lim_{\alpha, \alpha'} \|(F_{\alpha} - F_{\alpha'})a\| = \lim_{\alpha, \alpha'} \|a(F_{\alpha} - F_{\alpha'})\|$$

$\forall a \in G$.

Nach dem Faktorisierungssatz von Cohen (vgl. WILLIAMSON [11], S.80) gilt $\mathfrak{I} = \mathfrak{I} \cdot G$, da G eine beschränkte approximative Eins für $\mathfrak{I}$

besitzt; es folgt daher

$$0 = \lim_{\alpha, a} \| (F_{\alpha} - F_{\alpha'}) x \| \quad \forall x \in \mathfrak{X}.$$

Offenbar ist nun $F : x \mapsto \lim_{\alpha} F_{\alpha}(x)$ eine lineare Abbildung auf $\mathfrak{X}$.

Da für jedes $x \in \mathfrak{X}$ ebenso $\lim_{\alpha} F_{\alpha}^*(x)$ in $\mathfrak{Y}$ existiert, hat man

$$\| (F_{\alpha}^* - F_{\alpha'}^*)(x \cdot a) \| =$$

$$\sup \{ \| b((F_{\alpha}^* - F_{\alpha'}^*)x \cdot a, y) \| \mid y \in \mathfrak{Y}, \| y \| \leq 1 \} =$$

$$\sup \{ \| b(x \cdot a, (F_{\alpha} - F_{\alpha'})y) \| \mid y \in \mathfrak{Y}, \| y \| \leq 1 \} \leq$$

$$\leq \| x \| \sup \{ \| (F_{\alpha} - F_{\alpha'})(y) a \| \mid y \in \mathfrak{Y}, \| y \| \leq 1 \} =$$

$$\| x \| \| a \| \| F_{\alpha} - F_{\alpha'} \| \xrightarrow[\alpha, \alpha']{} 0$$

für alle $x \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$;

nunmehr folgt für alle $x, y \in \mathfrak{X}$

$$b(F(x), y) = \lim_{\alpha} b(F_{\alpha}(x), y) =$$

$$\lim_{\alpha} b(x, F_{\alpha}^*(y)) = b(x, \lim_{\alpha} F_{\alpha}^*(y)),$$

so daß F ein Operator aus $\mathfrak{A}_b$ ist.

Wegen $\lim_{\alpha} F_{\alpha} \cdot a \in \mathfrak{A}_b$ für alle $a \in \mathfrak{A}$ haben

wir insbesondere

$$F \cdot a(x) = F(x \cdot a) = \lim_{\alpha} F_{\alpha}(x \cdot a) = \left(\lim_{\alpha} F_{\alpha} \cdot a \right)(x)$$

für alle $x \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$,

d.h. F ist der Limes von $\{F_{\alpha}\}_{\alpha}$ in der

strikten Topologie.

Analog sieht man, daß $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$ mit der Multiplifier Algebra von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt.

Als letztes zeigen wir $M(\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{A}_b'$:

Seien dazu $F = F^* \in M(\mathfrak{B})$ und $G \in \mathfrak{A}_b$; dann

gilt für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}$

$$z \cdot a(FG(x), y) = z \cdot a(G(x), F(y)) =$$

$$b(z, F(y)) \cdot G(x) = G(b(z, F(y)) \cdot x) =$$

$$G(z \cdot a(x, F(y))) = G(z \cdot a(F(x), y)) =$$

$$G(b(z, y) \cdot F(x)) = b(z, y) \cdot GF(x) = z \cdot a(GF(x), y) ,$$

woraus aber $FG = GF$ folgt.
./.

Wir setzen nun

$$\mathfrak{X}_+ := \{ x \in \mathfrak{X} \mid a(x, x) \geq 0 \} \text{ und}$$

$$\mathfrak{X}_- := \{ x \in \mathfrak{X} \mid a(x, x) \leq 0 \}$$

und zeigen im folgenden, daß $\mathfrak{X}_+$, $\mathfrak{X}_-$ ternäre C^* -Unterringe von $\mathfrak{X}$ sind, die eine a -orthogonale Zerlegung von $\mathfrak{X}$ bilden.

Im nächsten Lemma bereiten wir diese Zerlegung vor, indem wir zeigen, daß jeder Vektor $x \in \mathfrak{X}$ eine Darstellung $x = x_+ + x_-$ mit $a(x_+, x_+) \geq 0$ und $a(x_-, x_-) \leq 0$ besitzt.

(4.6) Lemma Sei $x \in \mathfrak{X}$.

Dann existiert genau ein Paar $u, v \in \mathfrak{X}$ derart,
daß $x = u + v$, $a(u, v) = 0$, $a(u, u) = a(x, x)_+$ und
 $a(v, v) = -a(x, x)_-$ gelten.

Wir setzen $x_+ := u$ und $x_- := v$.

x_+ und x_- liegen in dem von x erzeugten ternären C^* -Ring und sind für $\|x\| \leq 1$ gegeben durch $x_{\pm} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot a(x, x)^{1/n}$.

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{T}$ mit $\|x\| \leq 1$. Sei $\mathfrak{I}$ der von x erzeugte ternäre C^* -Ring, sei $\mathcal{C}$ die von $a(x, x)$ erzeugte C^* -Algebra.

Es gilt

$$x_n := x \cdot a(x, x)_+^{1/n} \in \mathfrak{I} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin hat man für alle $n, m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \|a(x_n - x_m, x_n - x_m)\| = \\ \|a(x, x) (a(x, x)_+^{1/n} - a(x, x)_+^{1/m})^2\| &= \\ \|a(x, x)_+^{1/2} (a(x, x)_+^{1/n} - a(x, x)_+^{1/m})\|^2. \end{aligned}$$

Die Folge $\{a(x, x)_+^{1/2} a(x, x)_+^{1/n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist in $\mathcal{C}$ monoton steigend und punktweise konvergent gegen $a(x, x)_+^{1/2}$. Nach dem Satz von Dini ist die Konvergenz uniform. Daher existiert in $\mathfrak{I}$ der Normgrenzwert $u := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

$$\text{Es gilt } a(u, u) = \lim_n a(x_n, x_n) = a(x, x)_+.$$

Analog sieht man ein, daß in $\mathfrak{I}$ auch der Normgrenzwert $v := \lim_{n \rightarrow \infty} x \cdot a(x, x)_-^{1/n}$ existiert und $a(v, v) = -a(x, x)_-$ erfüllt.

Wegen $a(x, x)_+ a(x, x)_- = 0$ gilt

$$a(u, v) = \lim_n a(x, x) a(x, x)_+^{1/n} a(x, x)_-^{1/n} = 0.$$

(4.6.1) Durch $e_n := a(x, x)_+^{1/n} + a(x, x)_-^{1/n}$ ist eine approximative Eins der C^* -Algebra C gegeben.

Sei $C = C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, sei f die $a(x, x)$ entsprechende Funktion.

Es gilt $f \cdot e_n = f_+ \cdot f_+^{1/n} + f_- \cdot f_-^{1/n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$(f_+ \cdot f_+^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise und monoton steigend, also uniform gegen f_+ . Entsprechend konvergiert $(f_- \cdot f_-^{1/n})_{n \in \mathbb{N}}$ uniform gegen f_- . Daher konvergiert $(f \cdot e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniform gegen f .

Es folgt, daß für jedes Polynom $p \in C[t]$ die Folge $(p(f) e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $p(f)$ konvergiert.

Ist nun $y \in C$ beliebig, so existiert ein Polynom $p \in C[t]$ mit $\|p(f) - y\| < \varepsilon$; wegen $\|e_n\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ erhält man, daß $(y \cdot e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen y konvergiert.

Mit Hilfe von (4.6.1) ergibt sich nun für alle $y \in \mathcal{T}$

$$a(y, u + v) = a(y, \lim_n x \cdot (a(x, x)_+^{1/n} + a(x, x)_-^{1/n})) =$$

$$\lim_n a(y, x) (a(x, x)_+^{1/n} + a(x, x)_-^{1/n}) = a(y, x),$$

woraus wegen $u + v \in \mathcal{I}$ folgt, daß $x = u + v$ ist.

Um die Eindeutigkeit der Zerlegung von x zu zeigen, seien $u', v' \in \mathcal{I}$ mit $x = u' + v'$,
 $a(u', v') = 0$, $a(u', u') = a(x, x)_+$ und $a(v', v') = a(x, x)_-$. Dann gilt:

$$\|u' - u''\| =$$

$$\lim_n \|u' - x \cdot a(x, x)_+^{1/n}, u' - x \cdot a(x, x)_+^{1/n}\| =$$

$$\lim_n \|a(u', u') - a(x, u')a(x, x)_+^{1/n} -$$

$$- a(x, x)_+^{1/n} a(u', x) + a(x, x)a(x, x)_+^{2/n}\| =$$

$$\lim_n \|a(x, x)_+ - 2a(x, x)_+ a(x, x)_+^{1/n} +$$

$$+ a(x, x)_+ a(x, x)_+^{2/n}\| = 0.$$

Entsprechend schließt man $v' = v$.
./.

Die folgende Aussage ist im Beweis von (4.8.1) nötig.

(4.7) Lemma (a) Sei $x \in \mathfrak{I}_+$. Dann gibt es ein $x' \in \mathfrak{I}_+$ mit $a(x', x') = a(x, x)^{1/2}$ und
 $x = x' \cdot a(x, x)^{1/4}$.

(b) Sei $x \in \mathfrak{I}_-$. Dann gibt es ein $x' \in \mathfrak{I}_-$ mit $a(x', x') = -(a(x, x))^{1/2}$, $x = x' \cdot (-a(x, x))^{1/4}$.

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{I}_+$.

(4.7.1) Der von x erzeugte ternäre C*-Ring $\mathfrak{I}$ gehört zu $\mathfrak{I}_+$, und $(\mathfrak{I}, \text{rest}_{\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}} a)$ ist ein Hilbertmodul über der von $a(x, x)$ erzeugten C*-Algebra.

Sei nämlich $y := \sum_{i=0}^n \lambda_i x^{2i+1}$ ein ternäres

Polynom in x , wobei die Potenzen von x in-

duktiv definiert sind durch $x^1 := x$,
 $x^{2i+1} := (x^{2i-1}, x, x)$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \alpha(y, y) &= \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \alpha(x^{2i+1}, x^{2j+1}) = \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \alpha(x \cdot \alpha(x, x)^i, x \cdot \alpha(x, x)^j) = \\ &= \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \alpha(x, x)^j \alpha(x, x) \alpha(x, x)^i = \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \alpha(x, x)^i \right) \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i \alpha(x, x)^i \right)^* \alpha(x, x) \geq 0. \end{aligned}$$

Daher gilt $\alpha(z, z) \geq 0$ für jedes $z \in \mathcal{I}$.

Sei weiter $\mathcal{C}$ die von $\alpha(x, x)$ erzeugte C^* -Algebra. Wendet man die Darstellung (2.5) auf den in (4.7.1) gewonnenen Hilbertmodul über $\mathcal{C}$ an, so ergeben sich Hilberträume H, K und lineare Isometrien $U: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$, $\pi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ so, daß $\{\pi, H\}$ eine Sterndarstellung von $\mathcal{C}$ ist und

$$U(y \cdot a) = U(y)\pi(a), \quad U(z) * U(y) = \pi(\alpha(y, z))$$

für alle $y, z \in \mathcal{I}$ und $a \in \mathcal{C}$ gelten.

Sei R die partielle Isometrie der Polardarstellung von $X := U(x)$.

Nach (3.3) ist $Y \mapsto R * Y$ eine isometrische Isomorphie von $U(\mathcal{I})$ auf $\pi(\mathcal{C})$, wobei $R * X = |X| = (X * X)^{1/2}$ gilt. Der Operator $R |X|^{1/2}$ gehört dann zu $U(\mathcal{I})$, und setzt man $x' := U^{-1}(R |X|^{1/2})$, so folgen

$$\begin{aligned} \alpha(x', x') &= \pi^{-1}(U(x') * U(x')) = \\ &= \pi^{-1}(|X|^{1/2} R * R |X|^{1/2}) = \pi^{-1}(|X|) = \alpha(x, x)^{1/2}, \\ x' \cdot \alpha(x, x)^{1/4} &= U^{-1}(R |X|^{1/2} \pi(\alpha(x, x))^{1/4}) = \end{aligned}$$

$$U^{-1}(R |X|^{1/2} |X|^{1/2}) = U^{-1}(X) = x .$$

Analog zeigt man (b), indem man die Einschränkung von σ auf $\mathfrak{I}_+ \times \mathfrak{I}_-$ betrachtet.
./.

(4.8) Proposition $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ sind ternäre C^* -Unterringe von $\mathfrak{I}$, die $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ \oplus \mathfrak{I}_-$ erfüllen.

Die zu dieser Zerlegung gehörige Projektion $P : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}_+$ ist bezüglich σ wie auch b selbst-adjungiert.

Beweis: Wir zeigen zunächst

$$(4.8.1) \quad \mathfrak{I}_+ = \{ x \in \mathfrak{I} \mid b(x,x) \geq 0 \} .$$

Sei $x \in \mathfrak{I}_+$. Sei dazu x' gemäß (4.7)/(a) gewählt. Dann folgt

$$\begin{aligned} b(x',x')^2 &= b(b(x',x') \cdot x', x') = \\ b(x' \cdot \sigma(x',x'), x') &= b(x' \cdot \sigma(x,x)^{1/2}, x') = \\ b(x' \cdot \sigma(x,x)^{1/4}, x' \cdot \sigma(x,x)^{1/4}) &= b(x,x) . \end{aligned}$$

Daher ist auch $b(x,x) \geq 0$.

Analog ergibt sich mit Hilfe von (4.7)/(b), daß $b(x,x) \leq 0$ für jedes $x \in \mathfrak{I}_-$ gilt.

Da nach (4.5)/(b) die zu b gehörige Form mit σ übereinstimmt und da die positiven Kegel der beiden C^* -Algebren $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{G}_{\text{opp}}$ dieselben sind, ist (4.8.1) bewiesen.

Seien nun $x \in \mathfrak{I}_+$ und $y \in \mathfrak{I}_-$:

Setzt man $a := \sigma(x,x)^{1/2}$, so gilt $y \cdot a \in \mathfrak{I}_-$, und dies liefert

$$0 \geq b(y \cdot a, y \cdot a) = b(y \cdot a(x, x), y) =$$

$$b(b(y, x) \cdot x, y) = b(x, y) * b(x, y),$$

woraus $b(x, y) = 0$ folgt.

Daher sind die beiden Mengen $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ bezüglich b orthogonal.

Wegen (4.8.1) und der Tatsache, daß nach (4.5)/(b) die zu b gehörige Form gerade gleich a ist, zeigt die bisherige Überlegung auf das Tripel $\mathfrak{I}, b, \mathfrak{I}_0(\mathfrak{I})$ an Stelle von $\mathfrak{I}, a, \mathfrak{I}$ angewandt, daß $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ auch bezüglich a orthogonal sind.

Sind $x, y \in \mathfrak{I}_+$, so ist nach (4.6) $x + y$ in der Form $x + y = u + v$ mit $u \in \mathfrak{I}_+$ und $v \in \mathfrak{I}_-$ darstellbar; aus der eben gezeigten a -Orthogonalität von $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ ergibt sich

$$0 = a(x, v) = a(y, v) = a(u, v),$$

und damit

$$a(v, v) = a(x + y - u, v) = 0,$$

also $v = 0$. Es folgt $x + y = u \in \mathfrak{I}_+$.

Da außerdem für alle $x \in \mathfrak{I}_+$ und $a \in \mathfrak{I}$

$$a(x \cdot a, x \cdot a) = a * a(x, x)a \geq 0$$

gilt, folgt für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}_+$

$$a((x, y, z), (x, y, z)) = a(x \cdot a(z, y), x \cdot a(z, y)) \geq 0,$$

und dies zeigt zusammen mit der oben bewiesenen Relation $\mathfrak{I}_+ + \mathfrak{I}_+ \subset \mathfrak{I}_+$, daß $\mathfrak{I}_+$ einen ternären Unter-ring von $\mathfrak{I}$ bildet. Dieser ist normabgeschlossen, da a auf $\mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ normstetig ist und der positive Kegel in $\mathfrak{I}$ normabgeschlossen ist.

Ebenso folgt, daß $\mathfrak{I}_-$ einen normabgeschlossenen ternären Unterring von $\mathfrak{I}$ darstellt.

Aus der gezeigten Orthogonalität von $\mathfrak{I}_+$ und $\mathfrak{I}_-$ bezüglich α bzw. β schließt man sofort, daß die Projektion P von $\mathfrak{I}$ entlang $\mathfrak{I}_-$ auf $\mathfrak{I}_+$ bezüglich α bzw. β selbstadjungiert ist. $\therefore$

Mit Hilfe dieses Lemmas bringen wir nun den Be-
weis von Satz (4.1) zum Abschluß:

$\alpha_+ := \text{rest}_{\mathfrak{I}_+ \times \mathfrak{I}_+} \alpha$ ist offenbar ein G -wertiges inneres Produkt auf $\mathfrak{I}_+$. Bezeichnet G_1 die von $\alpha_+(\mathfrak{I}_+, \mathfrak{I}_+)$ in G erzeugte C^* -Algebra, so ist $(\mathfrak{I}_+, \alpha_+)$ ein treuer Hilbertmodul über G_1 .

Nach (2.5) gibt es Hilberträume H_+, K_+ und eine lineare Isometrie $U_+ : \mathfrak{I}_+ \rightarrow \mathcal{L}(H_+, K_+)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$\alpha_+(x, y) \rightsquigarrow U_+(y) * U_+(x)$ definiert eine isometrische Sterndarstellung von G_1 auf H_+ , welche G_1 in die von $U_+(\mathfrak{I}) * U_+(\mathfrak{I})$ erzeugte C^* -Algebra transformiert; für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}_+$ gilt $U_+(x \cdot \alpha_+(z, y)) = U_+(x) U_+(y) * U_+(z)$, also $U_+((x, y, z)) = U_+(x) U_+(y) * U_+(z)$.

Dadurch ist $\mathfrak{I}_+$ versehen mit der von $(\dots)$ induzierten ternären Operation als ternärer Operatorring zwischen Hilberträumen dargestellt.

Betrachtet man auf $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ die Restriktion α_- der Form $-\alpha$, so findet man analog Hilberträume H_-, K_- und eine lineare Isometrie U_- von $\mathfrak{X}_-$ in $\mathcal{L}(H_-, K_-)$, die der Formel $U_-((x, y, z)) = -U_-(x)U_-(y)*U_-(z)$ für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}_-$ genügt.

Um die Eindeutigkeit einer solchen Darstellung von $\mathfrak{X}$ nachzuweisen, seien $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ normabgeschlossene ternäre Unterringe von $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, für welche eine Isomorphie $U_1 : \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_1, K_1)$ und eine Antiisomorphie $U_2 : \mathfrak{X}_2 \rightarrow \mathcal{L}(H_2, K_2)$ existieren. Wir zeigen $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_+$ und $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}_-$:

Sei dazu G_1 die von $U_1(\mathfrak{X}_1)*U_1(\mathfrak{X}_1)$ in $\mathcal{L}(H_1)$ erzeugte C*-Algebra. $\mathfrak{X}_1$ ist vermöge

$$x \cdot a := U_1^{-1}(U_1(x) \cdot a) \quad \forall x \in \mathfrak{X}_1, a \in G_1$$

ein rechter Banachmodul über G_1 . Durch

$$\alpha_1(x, y) := U_1(y)*U_1(x) \quad \forall x, y \in \mathfrak{X}_1$$

wird eine hermitesche, stetige G_1 -Form auf $\mathfrak{X}_1$ definiert; α_1 erzeugt $(\cdot, \cdot, \cdot)$, denn es gilt

$$x \cdot \alpha_1(z, y) = U_1^{-1}(U_1(x)U_1(y)*U_1(z)) = (x, y, z)$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{X}_1$.

Die Eindeutigkeitsaussage des Satzes (4.3) ergibt, daß $\alpha(x, y) \mapsto \alpha_1(x, y)$ eine isometrische Sternisomorphie der von $\alpha(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_1)$ in G erzeugten C*-Algebra auf die Algebra G_1 definiert. Da $\alpha_1(x, x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}_1$ posi-

tiv ist, folgt $\mathfrak{I}_1 \subset \mathfrak{I}_+$. Analog ergibt sich $\mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{I}_-$.

Um die zweite Behauptung von (4.1) zu zeigen, betrachten wir den Operator $T := 2P - 1$.

Da nach (4.8) P bezüglich α wie auch b selbstadjungiert ist, folgt

$$\begin{aligned} T((x, y, z)) &= T(x) \cdot \alpha(z, y) = (Tx, y, z) - \\ b(Tx, y) \cdot z &= b(x, Ty) \cdot z = (x, Ty, z), \end{aligned}$$

und dann

$$\begin{aligned} T((x, y, z)) &= (x, Ty, z) = x \cdot \alpha(z, Ty) = \\ x \cdot \alpha(Tz, y) &= (x, y, Tz). \end{aligned}$$

Ferner ist $\alpha_T : (x, y) \mapsto \alpha(Tx, y)$ ein $\mathbb{Q}$ -wertiges inneres Produkt auf $\mathfrak{I}$, da für alle $x \in \mathfrak{I}$

$$\begin{aligned} \alpha_T(x, x) &= \alpha(2P(x) - x, x) = 2\alpha(x, x)_+ - \\ - \alpha(x, x) &= |\alpha(x, x)| \geq 0 \end{aligned}$$

gilt. Wendet man nun (2.5) auf den Hilbertmodul $(\mathfrak{I}, \alpha_T)$ über $\mathbb{Q}$ an, so sieht man, daß Hilberträume

H, K und eine lineare Isometrie U von $\mathfrak{I}$ in $\mathcal{L}(H, K)$ existieren derart, daß für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$

$$\begin{aligned} U(x)U(y)^*U(z) &= U(x \cdot \alpha_T(z, y)) = U((x, y, Tz)) = \\ U \circ T((x, y, z)) \end{aligned}$$

richtig ist.

Sei nun schließlich $S : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}$ eine Abbildung mit $S^2 = 1$, welche für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$ den Beziehungen $S((x, y, z)) = (Sx, y, z) = (x, Sy, z) = (x, y, Sz)$ genügt, und seien dazu H_S, K_S Hilberträume und $V : \mathfrak{I} \rightarrow \mathcal{L}(H_S, K_S)$ eine lineare Isometrie derart, daß für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}$

$V \circ S((x, y, z)) = V(x)V(y)*V(z)$ gilt.

Man sieht sofort, daß S in $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{I})$ selbstadjungiert ist. Daher gibt es Projektionen E, F in $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{I})$ mit $EF = 0$, $E + F = 1$ und $S = E - F$.

Insbesondere gehören E und F beide zur Menge der $\mathfrak{U}$ -Modulhomomorphismen auf $\mathfrak{I}$, so daß durch $\mathfrak{I}_1 := E(\mathfrak{I})$ und $\mathfrak{I}_2 := F(\mathfrak{I})$ zwei normabgeschlossene ternäre Unterringe von $\mathfrak{I}$ definiert sind, die zudem $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_2$ erfüllen.

$V_1 := \text{rest}_{\mathfrak{I}_1} V$ ist eine Isomorphie.

$V_2 := \text{rest}_{\mathfrak{I}_2} V$ ist eine Antiisomorphie, da

$$\begin{aligned} V_2((x, y, z)) &= V(F(x, y, z)) = -V \circ S(F(x, y, z)) = \\ &= -V(x)V(y)*V(z) = -V_2(x)V_2(y)*V_2(z) \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{I}_2$ gilt.

Aus der Eindeutigkeitsaussage des ersten Teils von Satz (4.1) schließt man nun $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_+$, $\mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_-$ sowie $S = P - (1 - P) = T$./.

(4.9) Ein einfaches Beispiel eines ternären C^* -Ringes bildet ein komplexer Hilbertraum $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit seiner natürlichen Norm $\|\cdot\|$, wenn die ternäre Operation $(\cdot, \cdot, \cdot)$ durch

$$(x, y, z) := \langle z | y \rangle x, \quad x, y, z \in H$$

definiert wird. Da $(H, \|\cdot\|)$ Dualraum eines Banachraumes ist, erhält man auf diese Weise insbesondere einen ternären W^* -Ring.

Mit der entsprechend definierten ternären Operation versehen ist ebenso jeder Hilbertmodul über ei-

ner C^* -Algebra ein ternärer C^* -Ring.

Das folgende Beispiel zeigt, daß der im Satz (4.1) auftretende Operator T i.A. von der identischen Abbildung verschieden ist.

(4.10) Sei Ω ein kompakter Hausdorffraum, der eine nichtleere, offene und abgeschlossene Menge $\Omega' \neq \Omega$ enthält. Sei χ die charakteristische Funktion von Ω' .

Setzt man

$$(f, g, h) := f\bar{g}h(2\chi - 1), \quad f, g, h \in C(\Omega),$$

so ist $(C(\Omega), (., ., .), \|\cdot\|_{\sup})$ ein ternärer C^* -Ring.

Die nach (4.1) existierende Zerlegung $C(\Omega) = C(\Omega)_+ \oplus C(\Omega)_-$ ist in diesem Falle gegeben durch $C(\Omega)_+ = C(\Omega) \cdot \chi = C(\Omega')$, und $C(\Omega)_- = C(\Omega) \cdot (1 - \chi) = C(\Omega \setminus \Omega')$. Für den Operator T gilt offenbar $T(f) = f \cdot (2\chi - 1)$, $f \in C(\Omega)$, also $T \neq 1$.

Es stellt sich das Problem, diejenigen ternären C^* -Ringe $(\mathfrak{I}, (., ., .), \|\cdot\|)$ zu charakterisieren, in deren Zerlegung $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_+ \oplus \mathfrak{I}_-$ nur noch $\mathfrak{I}_+$ auftritt, welche also ohne Abändern von $(., ., .)$ einem ternären Operatorenring isomorph sind.

Nach (4.5) gehört T zum Zentrum von $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$, welches mit dem Zentrum von $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ übereinstimmt. Notwendig und hinreichend für $T = \pm 1$ ist daher, daß $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ bzw. $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ einen Faktor bildet. Die Frage, wann dies der Fall ist, wird in der vorliegenden Arbeit nicht beantwortet.

§5. Der Darstellungssatz für ternäre W*-Ringe

(5.1) Satz Sei $(\tau, (., ., .), ".')$ ein ternärer W*-Ring.

Bezeichne τ die zugehörige schwach*Topologie auf τ und sei $\tau = \tau_+ \oplus \tau_-$ die Zerlegung von τ gemäß Satz (4.1).

Dann ist τ_+ bzw. τ_- σ -abgeschlossen und einem schwach abgeschlossenen ternären Operatorenring isomorph bzw. antiisomorph, d.h.

es gibt Hilberträume H_+, K_+ bzw. H_-, K_- und eine lineare Isometrie $U_+ : \tau_+ \rightarrow \mathcal{L}(H_+, K_+)$ bzw. $U_- : \tau_- \rightarrow \mathcal{L}(H_-, K_-)$, die bezüglich σ und der schwachen Operatortopologie homöomorph ist, derart, daß

$$U_+((x, y, z)) = U_+(x)U_+(y)*U_+(z)$$

bzw.

$$U_-((x, y, z)) = - U_-(x)U_-(y)*U_-(z)$$

für alle x, y, z aus τ_+ bzw. τ_- gilt.

Der Operator $T : \tau \rightarrow \tau$ aus Satz (4.1) ist σ -stetig. Ferner existieren Hilberträume H, K und eine lineare Isometrie $U : \tau \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$, die bezüglich σ und der schwachen Operatortopologie homöomorph ist, derart, daß

$$U \cdot T((x, y, z)) = U(x)U(y)*U(z)$$

für alle $x, y, z \in \tau$ erfüllt ist.

(5.2) Korollar Sei $(\mathfrak{X}, (.,.,.), ".")$ ein ternärer W^* -Ring.

Mit dem Operator T aus Satz (4.1) ist dann durch

$$(. , . , .)_T := T \circ (. , . , .)$$

eine ternäre Operation auf $\mathfrak{X}$ gegeben so, daß $(\mathfrak{X}, (.,.,.)_T, ".")$ einem schwach abgeschlossenen ternären Operatorenring zwischen zwei Hilberträumen isometrisch und schwach* isomorph ist.

Zum Beweis des Satzes (5.1) gehen wir von dem in (4.3) zu $(\mathfrak{X}, (.,.,.), ".")$ konstruierten Paar $(\mathfrak{A}, \sigma)$ aus. Daneben halten wir einen Prädualraum $\mathfrak{X}_*$ von $\mathfrak{X}$ fest; σ bezeichne die schwach*Topologie $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_*)$ auf $\mathfrak{X}$:

OBdA können wir annehmen, daß $(\mathfrak{X}, \sigma)$ ein Hilbertmodul über $\mathfrak{A}$ ist, d.h. wir betrachten gemäß (4.2) die ternäre Operation $(.,.,.)_T$ an Stelle der ursprünglichen Operation $(.,.,.)$.

Sei α nach (2.2) zu einem $\mathfrak{A}^{**}$ -wertigen inneren Produkt $\hat{\alpha}$ auf $\mathfrak{X}'' = \text{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}^{**})$ fortgesetzt. Sei ferner σ'' die in Paragraph 2 diskutierte schwach*Topologie auf $\mathfrak{X}''$.

Wie eine Polardarstellung (5.4) für die σ -stetigen linearen Funktionale auf $\mathfrak{X}$ zeigt, ist die Einschränkung von σ'' auf $\mathfrak{X}$ feiner als σ . Dies liefert eine σ'' - σ -stetige Projektion

$$\phi : \mathfrak{X}'' \rightarrow \mathfrak{X}.$$

Der nächste Schritt besteht darin zu zeigen, daß der Kern von ϕ die Form $\mathfrak{X}''(1 - e)$ mit einer zentralen Projektion $e \in \mathfrak{A}^{**}$ besitzt; vgl. (5.9).

Die Multiplier Algebra $M(G)$ (welche nach (4.5) antiisomorph zu $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ ist) erweist sich als W^* -Algebra. In (5.10) finden wir eine schwach* stetige lineare Projektion

$$\Psi : G^{**} \rightarrow M(G),$$

die $\text{Kern}(\Psi) = G^{**}(1 - e)$ genügt und die durch

$$\Phi(\tau \cdot A) = \Phi(\tau) \cdot \Psi(A) \quad \forall \tau \in \mathfrak{X}', A \in G^{**}$$

gegeben ist.

Es folgt in (5.11), daß $(\mathfrak{X}, \alpha)$ einen selbstdualen Hilbertmodul über der W^* -Algebra $M(G)$ bildet, woraus sich die gewünschte Darstellung mit Hilfe von (2.6) ergibt.

Anschließend erhalten wir in (5.12), (5.13), daß $M(G)_*$ die Form $\mathfrak{X} \hat{\otimes}_{M(G)} \mathfrak{X}_*$ besitzt, während

$\mathfrak{X}_*$ mit $\mathfrak{X} \otimes M(G)_*$ identifiziert werden kann. Es folgt, daß der Prädualraum von $\mathfrak{X}$ eindeutig bestimmt ist.

Im folgenden (bis einschließlich (5.10)) sei also die Form α als positiv vorausgesetzt. $(\mathfrak{X}, \alpha)$ ist dann ein treuer Hilbertmodul über G , den wir mit seinem kanonischen Bild in $(\mathfrak{X}', \hat{\alpha})$ identifizieren.

(5.3) Lemma Für jede Projektion $E' \in \mathfrak{A}_\alpha(\mathfrak{X})$ bzw. $E \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ ist $E' \cdot \mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{X} \cdot E$ σ -abgeschlossen.

Beweis: Sei $\{x_\alpha\}_\alpha \subset D_1(\mathfrak{X}) \cap E' \cdot \mathfrak{X}$ ein Netz, welches in σ gegen $x \in \mathfrak{X}$ konvergiert.

Für jedes $\tau \in D_1(\mathfrak{X}')$ mit $\tau = (1 - E') \cdot \tau$

gilt dann

$$\begin{aligned} \|x_\alpha + n\tau\| &= \|\hat{\delta}(x_\alpha + n\tau, x_\alpha + n\tau)\|^{1/2} = \\ &= \|\delta(x_\alpha, x_\alpha) + n^2 \delta(\tau, \tau)\|^{1/2} \leq (1 + n^2)^{1/2} \\ &\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha. \end{aligned}$$

Im Falle $\tau \in \mathcal{I}$ hat man hier insbesondere

$$x + n\tau = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} (x_\alpha + n\tau), \text{ also}$$

$$\|x + n\tau\| \leq (1 + n^2)^{1/2} \quad \text{und daher}$$

$$\begin{aligned} \|(1-E') \cdot x + n\tau\| &= \|(1-E') \cdot (x + n\tau)\| \leq \\ &\leq (1 + n^2)^{1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, $x' := (1 - E') \cdot x$ wäre von 0 verschieden. Nach (2.7) ist $\mathfrak{I}'$ einem schwach abgeschlossenen ternären Operatorenring isomorph, so daß nach (3.3)/(b) die mit x' assoziierte partielle Isometrie r der Polardarstellung von x' zu $\mathfrak{I}'$ gehört. Es gilt $r = (1 - E') \cdot r$, und r wäre ebenfalls von 0 verschieden.

Nach (2.6) gibt es ein Netz $\{y_\beta\}_\beta \subset D_1(\mathfrak{I})$, welches bezüglich σ'' gegen r konvergiert. Da die Abbildung $\tau \mapsto (1 - E') \cdot \tau$ nach der Darstellung (2.7) auf $\mathfrak{I}'$ stetig bezüglich σ'' ist, können wir OBdA $y_\beta = (1 - E') \cdot y_\beta$ für alle β annehmen.

Da x' in der mit r nach (3.2) assoziierten W^* -Algebra $(\mathfrak{I}')_{(r)}$ positiv ist, gäbe es ein $\lambda > 0$ mit

$$\begin{aligned} \lambda + n &\leq \|(1 - E') \cdot x + n\tau\| \leq \\ &\leq \liminf_{\beta} \|(1 - E') \cdot x + n y_\beta\| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wie oben gezeigt, gilt aber für alle β und $n \in \mathbb{N}$

$$\|(1 - E') \cdot x + n y_\beta\| \leq (1 + n^2)^{1/2},$$

was auf den Widerspruch $\lambda + n \leq (1 + n^2)^{1/2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ führen würde.

Der Schluß für $E \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ verläuft analog. ./.

(5.4) Proposition Sei $f \in \mathfrak{X}_*$.

Dann gibt es einen Extremalpunkt r der Einheitskugel $D_1(\mathfrak{X})$ von $\mathfrak{X}$ (also eine partielle Isometrie nach (3.4)) und positive lineare Funktionale $\varphi \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})^*$, $\psi \in \mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})^*$ so, daß

$$f(x) = \varphi(\sigma(x, r)) = \psi(h(x, r)) \quad \forall x \in \mathfrak{X}$$

gilt. φ bzw. ψ kann in der Form

$$\varphi(A) = f(r \cdot A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X}) \quad \text{bzw.}$$

$$\psi(A') = f(A' \cdot r) \quad \forall A' \in \mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$$

gewählt werden, und es gilt dann $\|f\| = \|\varphi\| = \|\psi\|$.

Beweis: Sei OBdA $\|f\| = 1$.

Da $D_1(\mathfrak{X})$ bezüglich σ kompakt ist, gibt es ein $x \in D_1(\mathfrak{X})$ mit $f(x) = 1$. Man sieht wie üblich, daß sogar ein Extremalpunkt r von $D_1(\mathfrak{X})$ mit $f(r) = 1$ existiert.

$\varphi : A \mapsto f(r \cdot A)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$ mit $\|\varphi\| \leq 1$. Wegen

$$\varphi(\sigma(r, r)) = f(r \cdot \sigma(r, r)) = f(r) = 1$$

gilt $\|\varphi\| = 1$, und damit ist φ positiv.

Weiterhin haben wir für alle $x \in \mathfrak{X}$

$$\varphi(\alpha(x,r)) = f(r \cdot \alpha(x,r)) = f(b(r,r) \cdot x) ,$$

so daß $f(x) = f(b(r,r) \cdot x)$ zu zeigen bleibt:

Sei dazu $E' := b(r,r)$; nach (5.3) ist $(1 - E') \cdot \mathfrak{I}$ bezüglich σ abgeschlossen; gäbe es nun ein $x \in (1 - E') \cdot \mathfrak{I}$ mit $f(x) \neq 0$, so enthielte nach der obigen Argumentation der ternäre W^* -Ring $(1 - E') \cdot \mathfrak{I}$ auch eine partielle Isometrie r' mit $f(r') > 0$, und man bekäme für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (1 + n^2)^{1/2} &\geq \|n^2 \alpha(r,r) + \alpha(r',r')\|^{1/2} = \\ &\|\alpha(nr + r', nr + r')\|^{1/2} = \|nr + r'\| \geq \\ &\geq |f(nr + r')| = n + f(r') , \end{aligned}$$

also einen Widerspruch.

Der Beweis im Falle von ψ verläuft analog. ./.

(5.5) Lemma Jedes $f \in \mathfrak{I}_*$ kann auf genau eine Weise zu einem Funktional $f' \in \mathfrak{I}'_*$ fortgesetzt werden, es gilt dabei $\|f\| = \|f'\|$.

Insbesondere ist σ gröber als die Einschränkung von σ' auf $\mathfrak{I}$.

Beweis: Sei $f = \varphi(\alpha(.,r))$ die Darstellung von f nach (5.4).

Gemäß Paragraph 2 gehört $\tau \mapsto \varphi(\mathfrak{A}(\tau,r))$ zu $\mathfrak{I}'_*$ und ist offenbar eine Fortsetzung f' von f . Da nach (2.3) $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}'$ dicht bezüglich σ'' ist, gibt es nur eine solche Fortsetzung. Da nach (2.6) $D_1(\mathfrak{I})$ in $D_1(\mathfrak{I}')$ bezüglich σ'' dicht ist, gilt auch $\|f\| = \|f'\|$.

$\sigma \subset \sigma'|_{\mathfrak{I}}$ ist nun klar. ./.

(5.6) Proposition Die Transponierte der mit Hilfe von (5.5) konstruierten Fortsetzungsabbildung $f \mapsto f'$ von $\mathfrak{X}_*$ in $\mathfrak{X}'_*$ ist eine lineare, schwach* stetige Projektion $\mathfrak{P}: \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$ mit Norm 1.

Bei den nächsten Überlegungen geht es darum, die Moduleigenschaften von $\mathfrak{P}$ nachzuweisen. Wir erkennen damit, daß der Kern von $\mathfrak{P}$ ein zweiseitiges Ideal des Banach-Bimoduls $\mathfrak{X}'$ ist.

Von Bedeutung ist zunächst, wie sich $\mathfrak{P}$ gegenüber den C*-Algebren verhält, die mit partiellen Isometrien von $\mathfrak{X}$ assoziiert sind.

(5.7) Lemma Sei $r \in \mathfrak{X}$ eine partielle Isometrie.

Sei gemäß (3.2) $\mathfrak{X}_{(r)} = \mathfrak{b}(r, r) \cdot \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{a}(r, r)$ bzw. $\mathfrak{X}'_{(r)} = \mathfrak{b}(r, r) \cdot \mathfrak{X}' \cdot \mathfrak{a}(r, r)$ die mit r in $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{X}'$ assoziierte C*-Algebra.

(a) $\mathfrak{P}(\mathfrak{X}'_{(r)}) = \mathfrak{X}_{(r)}$, d.h. $\mathfrak{P}$ induziert eine lineare, schwach* stetige Projektion mit Norm 1 von $\mathfrak{X}'_{(r)}$ auf $\mathfrak{X}_{(r)}$.

(b) $\mathfrak{X}_{(r)}$ ist eine W*-Algebra mit der Einschränkung von $\mathfrak{X}_*$ auf $\mathfrak{X}_{(r)}$ als Prädual.

Beweis: Wir zeigen als erstes

(5.7.1) Ist $x \in \mathfrak{X}$ und gilt $f(x) \geq 0$ für alle diejenigen $f \in \mathfrak{X}_*$, deren Einschränkung auf $\mathfrak{X}_{(r)}$ ein positives Funktional dieser C*-Algebra liefert, so ist x ein positives Element von $\mathfrak{X}_{(r)}$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach ist der Raum

aller states von $\mathfrak{I}(r)$ in der Form

$$\left\{ \text{rest}_{\mathfrak{I}(r)} f \mid f \in \mathfrak{I}^* , f(r) = 1 = \|f\| \right\}$$

darstellbar. Daher ist zu zeigen, daß x zu $\mathfrak{I}(r)$ gehört, daß also $x = b(r,r) \cdot x = x \cdot c(r,r)$ gilt:

Wäre $x' := (1 - b(r,r)) \cdot x$ von Null verschieden, so gäbe es ein $f \in \mathfrak{I}^*$ mit $f(x') = -1$. Dann läge $g : y \mapsto f((1 - b(r,r)) \cdot y)$ in $\mathfrak{I}^*$, wäre positiv auf der C*-Algebra $\mathfrak{I}(r)$,

da $g(\mathfrak{I}(r)) = \{0\}$ ist, und nach Voraussetzung hätte man $g(x) \geq 0$; im Widerspruch zu $g(x) = f(x') = -1$.

Analog sieht man $x = x \cdot c(r,r)$.

Es folgt nun, daß $\Phi(\mathfrak{I}''(r))$ in $\mathfrak{I}(r)$ enthalten ist:

Sei nämlich $f \in \mathfrak{I}^*$ mit $f(r) = 1 = \|f\|$. Die Einschränkung f_1 von f auf $\mathfrak{I}(r)$ ist dann ein state von $\mathfrak{I}(r)$. Sei g_1 die Einschränkung von $f \circ \Phi$ auf $\mathfrak{I}''(r)$; wegen $g_1(r) = f(r) = 1$ und $\|g_1\| \leq 1$ ist g_1 ein state von $\mathfrak{I}''(r)$. Ist nun τ ein positives Element der C*-Algebra $\mathfrak{I}''(r)$, so gilt $g_1(\tau) \geq 0$, also $f(\Phi(\tau)) \geq 0$. Aus (5.7.1) folgt $\Phi(\tau) \in \mathfrak{I}(r)$. Damit ist (a) bewiesen.

$\mathfrak{I}''(r)$ ist in $\mathfrak{I}''$ schwach* abgeschlossen. Daher ist $D_1(\mathfrak{I}(r)) = \Phi(D_1(\mathfrak{I}''(r)))$ bezüglich σ in

$\mathfrak{I}'$ kompakt, d.h. $\mathfrak{I}_{(r)}$ ist in $\mathfrak{I}$ σ -abgeschlossen. Also besitzt $\mathfrak{I}_{(r)}$ als Prädualraum die Einschränkung von $\mathfrak{I}_*$ auf $\mathfrak{I}_{(r)}$./.

(5.8)Lemma Für jedes $A \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ bzw. jedes $A' \in \mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ ist die Abbildung $x \mapsto x \cdot A$ bzw. $x \mapsto A' \cdot x$ auf $\mathfrak{I}$ σ -stetig.

Beweis: Wir zeigen, daß die Abbildung $x \mapsto x \cdot U$ für jedes unitäre $U \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ σ -stetig ist. Sei dazu $\{x_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{I}$ ein Netz mit $0 = \sigma\text{-}\lim_\alpha x_\alpha$; sei ferner $f \in \mathfrak{I}_*$. Wir haben dann $0 = \lim_\alpha f(x_\alpha \cdot U)$ nachzuweisen:

Gemäß (5.4) hat f die Form $f(x) = \psi(b(x, r))$, $x \in \mathfrak{I}$, wobei $r \in \mathfrak{I}$ eine partielle Isometrie ist. Man sieht sofort, daß $r' := r \cdot U^*$ ebenfalls eine partielle Isometrie ist und daß $e' := b(r, r) = b(r', r')$ gilt.

Sei $\mathfrak{B}$ die von $b(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ in $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ erzeugte C^* -Algebra, sei $\mathfrak{B}_{(e')} := e' \mathfrak{B} e'$. Dann ist $\mathfrak{B}_{(e')}$ als C^* -Algebra vermöge

$$B' \mapsto B' \cdot r \quad \text{bzw.} \quad B' \mapsto B' \cdot r'$$

zur W^* -Algebra $\mathfrak{I}_{(r)}$ bzw. $\mathfrak{I}_{(r')}$ isometrisch isomorph. Daher ist $\mathfrak{B}_{(e')}$ eine W^* -Algebra, deren Prädual sowohl durch $\{B' \mapsto f(B' \cdot r) \mid f \in \mathfrak{I}_*\}$ wie auch durch $\{B' \mapsto f(B' \cdot r') \mid f \in \mathfrak{I}_*\}$ gegeben wird.

Nach (5.4) gehört ψ zum Prädual von $\mathfrak{B}_{(e')}$;

daher gibt es ein $h \in \mathfrak{X}_*$ so, daß

$$\psi(B') = h(B' \cdot r') \quad \forall B' \in \mathfrak{B}(e')$$

gilt. Weiterhin sind nach (5.3) die Abbildungen

$$x \mapsto b(r, r) \cdot x \quad \text{und} \quad x \mapsto x \cdot o(r', r')$$

auf $\mathfrak{X}$ stetig bezüglich σ . Es folgt nun

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha} f(x_{\alpha} \cdot U) &= \lim_{\alpha} \psi(b(x_{\alpha} \cdot U, r)) = \\ \lim_{\alpha} \psi(b(e' \cdot x_{\alpha}, r')) &= \lim_{\alpha} h(b(e' \cdot x_{\alpha}, r') \cdot r') = \\ \lim_{\alpha} h(e' \cdot x_{\alpha} \cdot o(r, r)) &= 0. \end{aligned}$$

./.

(5.9) Korollar Für $\sharp$ gilt:

(a) $\sharp(\tau \cdot A) = \sharp(\tau) \cdot A$ und $\sharp(A' \cdot \tau) =$

$A' \cdot \sharp(\tau)$ für alle $\tau \in \mathfrak{X}'$, $A \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X})$, $A' \in \mathfrak{A}_d(\mathfrak{X})$.

(b) Kern($\sharp$) ist ein schwach* abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{X}'$. Es gibt daher eine zentrale Projektion $e \in G^{**}$ so, daß $\text{Kern}(\sharp) = \tau' \cdot (1 - e)$ gilt.

Beweis: Sei $\tau \in \mathfrak{X}'$. Nach (2.6) existiert ein normbeschränktes Netz $\{x_{\alpha}\}_{\alpha} \subset \mathfrak{X}$, welches in σ' gegen τ konvergiert. Es folgt

$$\tau \cdot A = \sigma'\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha} \cdot A \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}_b(\mathfrak{X}).$$

Mit (5.8) ergibt sich

$$\sharp(\tau \cdot A) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} \sharp(x_{\alpha} \cdot A) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha} \cdot A = \sharp(\tau) \cdot A,$$

da $\sharp(\tau) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} \sharp(x_{\alpha}) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha}$ gilt.

Für $A' \in \mathfrak{A}_d(\mathfrak{X})$ überlegt man analog.

Aus (a) folgt sofort, daß $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I}) \cdot \text{Kern}(\Phi)$ wie auch $\text{Kern}(\Phi) \cdot \mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ in $\text{Kern}(\Phi)$ enthalten ist. Da $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ in $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I}')$ schwach* dicht liegt und da die Abbildung $A' \mapsto A' \cdot \tau$ schwach* stetig ist, ergibt sich, daß $\text{Kern}(\Phi)$ ein Linksideal in $\mathfrak{I}'$ bildet.

Die Rechtsidealeigenschaft folgt analog.

Also ist $\text{Kern}(\Phi)$ ein schwach* abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{I}'$, so daß (b) mit Rücksicht auf (3.6) bewiesen ist.
./.

(5.10)Satz Die Multiplier Algebra $M(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ (welche isometrisch antiisomorph zu $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ ist) bildet eine W*-Algebra.

Es existiert eine lineare, schwach* stetige Projektion Ψ von $\mathfrak{G}^{**}$ auf $M(\mathfrak{G})$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(a) \quad \Phi(\tau \cdot A) = \Phi(\tau) \cdot \Psi(A) \quad \forall \tau \in \mathfrak{I}', \quad \forall A \in \mathfrak{G}^{**}.$$

(b) $\text{Kern}(\Psi) = (1 - e)\mathfrak{G}^{**}$, wobei e die Projektion aus (5.9) mit $\text{Kern}(\Phi) = \mathfrak{I}'$ (1 - e) bedeutet.

$$(c) \quad \Psi(\hat{\Phi}(\tau, \eta)) = \circ(\Phi(\tau), \Phi(\eta))$$

$\forall \tau, \eta \in \mathfrak{I}'$.

Beweis: Sei zunächst $A \in \mathfrak{G}^{**}$ beliebig.
Offenbar ist

$$\Phi_A : x \mapsto \Phi(x \cdot A)$$

ein stetiger, linearer Operator auf $\mathfrak{I}$, der $\|\Phi_A\| \leq \|A\|$ erfüllt. Nach (5.9)/(a) ist Φ_A ein $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ -Modulhomomorphismus auf $\mathfrak{I}$. Wir zeigen, daß Φ_A sogar zu $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{I})$ gehört und definieren dann

" durch $\omega(\cdot) := i_A$.

Sei Ω die Menge aller normstetigen $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$ -
-Modulhomomorphismen auf $\mathfrak{X}$; Ω sei also der Kom-
mutator von $\mathfrak{A}_0(\mathfrak{X})$ in $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

Sei Γ die schwache Topologie auf Ω , welche
von allen Funktionalen der Form

$$S \mapsto f(S(x)), \quad f \in \mathfrak{X}_*, \quad x \in \mathfrak{X}$$

erzeugt wird. Γ ist lokalkonvex und separiert.

(5.10.1) Die Form α ist auf $\mathfrak{X}$ getrennt ste-
tig bezüglich $\sigma \times \sigma$ und Γ .

Gelte $x = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} x_{\alpha}$ in $\mathfrak{X}$, sei $z \in \mathfrak{X}$.

Sind $f \in \mathfrak{X}_*$ und $y \in \mathfrak{X}$ beliebig, so folgt
aus (5.8)

$$\lim_{\alpha} f(y \cdot \alpha(x_{\alpha}, z)) = \lim_{\alpha} f(b(y, z) \cdot x_{\alpha}) =$$

$$f(b(y, z) \cdot x) = f(y \cdot \alpha(x, z)),$$

$$\text{also } \alpha(x, z) = \Gamma\text{-}\lim_{\alpha} \alpha(x_{\alpha}, z).$$

Mit Hilfe einer Polardarstellung $f = \varphi(\alpha(\cdot, r))$
gemäß (5.4) sieht man außerdem für alle $y, z \in \mathfrak{X}$

$$\begin{aligned} f(y \cdot \alpha(z, x_{\alpha})) &= \varphi(\alpha(y, r) \alpha(z, x_{\alpha})) = \\ &= \overline{\varphi(\alpha(x_{\alpha}, z) \alpha(r, y))} = \overline{\varphi(\alpha(r, r) \alpha(x_{\alpha}, z) \alpha(r, y))} = \\ &= \overline{\varphi(\alpha(r \cdot \alpha(x_{\alpha}, z) \alpha(r, y), r))} = \\ &= \overline{\varphi(\alpha(b(r, z) \cdot x_{\alpha} \cdot \alpha(r, y), r))} = \\ &= \overline{f(b(r, z) \cdot x_{\alpha} \cdot \alpha(r, y))} \xrightarrow{\alpha} \overline{f(b(r, z) \cdot x \cdot \alpha(r, y))} = \\ &= \dots = \varphi(\alpha(y, r) \alpha(z, x)) = f(y \cdot \alpha(z, x)). \end{aligned}$$

Daher gilt auch $\sigma(z, x) = \Gamma\text{-}\lim_{\alpha} \sigma(z, x_{\alpha})$.

(5.10.2) Ist $A \in G^{**}$ der schwach*Limex des Netzes $\{a_{\alpha}\}_{\alpha} \subset G$, so gilt für alle $y, z \in \mathbb{X}$

$$\sigma(z, \mathfrak{f}_{A*}(y)) = \Gamma\text{-}\lim_{\alpha} \sigma(z, y \cdot a_{\alpha}^*) .$$

Denn aus $y \cdot A^* = \sigma'\text{-}\lim_{\alpha} y \cdot a_{\alpha}^*$ folgt

$$\mathfrak{f}_{A*}(y) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} y \cdot a_{\alpha}^* , \text{ und man wendet nun}$$

(5.10.1) an.

Wir können jetzt zeigen, daß $\mathfrak{f}_A$ ein Element von $\mathfrak{B}_b(\mathbb{X})$ ist und daß $(\mathfrak{f}_A)^* = \mathfrak{f}_{A*}$ gilt:

Sei dazu $\{a_{\alpha}\}_{\alpha} \subset G$ ein Netz, das in G^{**} schwach* gegen ein Element A konvergiert. Aus (5.10.2) ergibt sich für alle $x, y, z \in \mathbb{X}$

$$b(\mathfrak{f}_A(x), y) \cdot z = \mathfrak{f}(x \cdot A \sigma(z, y)) =$$

$$\sigma\text{-}\lim_{\alpha} x \cdot a_{\alpha} \sigma(z, y) = \sigma\text{-}\lim_{\alpha} x \cdot \sigma(z, y \cdot a_{\alpha}^*) =$$

$$x \cdot \sigma(z, \mathfrak{f}_{A*}(y)) = b(x, \mathfrak{f}_{A*}(y)) \cdot z .$$

Man sieht nun sofort, daß $\Psi : A \mapsto \mathfrak{f}_A$ ein sterntreuer Antihomomorphismus von G^{**} auf $\mathfrak{B}_b(\mathbb{X})$ ist, der $M(G)$ festläßt. Die Beziehung

$$\mathfrak{f}(\tau \cdot A) = \mathfrak{f}(\tau) \cdot \Psi(A)$$

folgt mit Hilfe von (5.8) aus $\mathfrak{f}(x \cdot A) = x \cdot \Psi(A)$, $x \in \mathbb{X}$.

Da $\Psi(A) = 0$ genau dann richtig ist, wenn $\mathfrak{f}(x \cdot A) = 0$ für alle $x \in \mathbb{X}$ gilt, ergibt sich:

$$\text{Kern}(\Psi) = \{ A \in G^{**} \mid \mathbb{X} \cdot A \subset \text{Kern}(\mathfrak{f}) \} =$$

$$(1 - e)G^{**}.$$

Daher ist Ψ ein isometrischer Sternisomorphismus der W^* -Algebra eG^{**} auf die C^* -Algebra $M(G)$. Insbesondere ist $M(G)$ eine W^* -Algebra: bezeichnet V den Prädualraum von eG^{**} und ist $\Psi^{-1} : M(G) \rightarrow eG^{**}$ die Inverse von Ψ , so kann der Prädual von $M(G)$ in der Form $V \cdot \Psi^{-1}$ dargestellt werden.

Die Behauptung (c) des Satzes rechnet man unmittelbar nach, wobei man beachtet, daß nach (2.3) $\mathfrak{I}$ in $\mathfrak{I}''$ bezüglich σ'' dicht ist, um dann (5.10.1) anzuwenden.
./.

(5.11) Korollar Sei $(\mathfrak{I}, (., .), \|\cdot\|)$ ein ternärer W^* -Ring.

Seien $T : \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{I}$ der Operator gemäß des Darstellungssatzes (4.1) und G die C^* -Algebra des Paares (G, σ) aus Satz (4.3).

Dann ist $M(G)$ eine W^* -Algebra, und versehen mit dem inneren Produkt

$$\sigma_T : (x, y) \mapsto \sigma(Tx, y)$$

ist $\mathfrak{I}$ ein selbstdualer Hilbertmodul über $M(G)$.

Beweis: Daß $M(G)$ eine W^* -Algebra ist, haben wir bereits in (5.10) gesehen.

Sei $\tau \in \text{Hom}_{M(G)}(\mathfrak{I}, M(G))$ beliebig:
dann ist $\tau_1 := \tau \circ \sharp$ ein Element von $\mathfrak{I}''$, so daß mit (5.10) für alle $x \in \mathfrak{I}$ folgt

$$\sigma_T(x, \sharp(\tau_1)) = \Psi(\hat{\sigma}_T(x, \tau_1)) = \Psi(\tau_1(x)) =$$

$$\tau_1(x) = \tau(x) \quad ./.$$

Mit diesem Korollar haben wir nun alles bereit, was zum vollständigen Beweis des Darstellungssatzes (5.1) nötig ist. Der Satz ergibt sich wie folgt:

Sei $P : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_+$ die zur Zerlegung $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_+ \oplus \mathfrak{X}_-$ gehörige Projektion. Nach (4.8) gehört P zu $\mathfrak{M}_0(\mathfrak{X}) \cap \mathfrak{M}_b(\mathfrak{X})$. Aus (4.5) folgt, daß P im Zentrum von $M(\mathfrak{G}_{\text{opp}})$, also auch im Zentrum von $M(\mathfrak{G})$ liegt. Nach TAYLOR [10], Korollar 2.3 ist $\mathfrak{G}^*$ isomorph dem Dualraum von $(M(\mathfrak{G}), \beta)$, wobei β die von $\mathfrak{G}$ auf $M(\mathfrak{G})$ erzeugte strikte Topologie bedeutet. Man sieht dann leicht, daß $M(\mathfrak{G})$ als C^* -Algebra in $\mathfrak{G}^{**}$ enthalten ist.

Somit existiert eine Projektion $p \in \mathfrak{G}^{**}$ mit $P(x) = x \cdot p$ für alle $x \in \mathfrak{X}$, und p ist notwendig zentral in $\mathfrak{G}^{**}$. Nach (5.8) ist daher P stetig bezüglich σ . Ferner sind die ternären Unterringe $\mathfrak{X}_+$ und $\mathfrak{X}_-$ deswegen σ -abgeschlossen, und auch der Operator $T = 2P - 1$ ist auf $\mathfrak{X}$ σ -stetig.

Nach (5.11) ist $(\mathfrak{X}_+, \alpha_+)$ wie auch $(\mathfrak{X}_-, \alpha_-)$ ein selbstdualer Hilbertmodul über der W^* -Algebra $M(\mathfrak{G})$ und als solcher gemäß (2.7) als schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring zwischen Hilberträumen darstellbar (α_+ bzw. α_- bedeute hierbei die Restriktion von α bzw. $-\alpha$ auf $\mathfrak{X}_+ \times \mathfrak{X}_+$ bzw. $\mathfrak{X}_- \times \mathfrak{X}_-$).

Die zweite Behauptung des Satzes (5.1) ergibt sich analog.
./.

Mit Hilfe der folgenden Charakterisierung der Algebra $M(G) = \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ und ihres Präduals werden wir sehen, daß der Prädualraum eines ternären W^* -Ringes bis auf isometrische Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

(5.12) Proposition Sei $(\mathfrak{I}, (., ., .), \|\cdot\|)$ ein ternärer W^* -Ring.

Bezeichnet (in der Notation von (4.)) $\mathfrak{A}$ die von $b(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ in $\mathfrak{A}_b(\mathfrak{I})$ erzeugte C^* -Algebra, so gilt

$$M(G)_{\text{opp}} = \text{Hom}_{M(\mathfrak{A})}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) = M(\mathfrak{A})' .$$

Insbesondere besitzt der Prädual von $M(G)$ die Darstellung $\mathfrak{I} \hat{\otimes}_{M(\mathfrak{A})} \mathfrak{I}_*$.

Beweis: Versehen mit $b_T : (x, y) \mapsto b(Tx, y)$ als $M(\mathfrak{A})$ -wertigem innerem Produkt ist $\mathfrak{I}$ ein selbst-dualer Hilbertmodul über der W^* -Algebra $M(\mathfrak{A})$. Man erkennt dies sofort, wenn man in den bisherigen Überlegungen das Tripel $(\mathfrak{I}, a, G)$ durch $(\mathfrak{I}, b, \mathfrak{A})$ ersetzt.

Ferner sieht man, daß für den Hilbertmodul $(\mathfrak{I}, b_T)$ der Riesz'sche Darstellungssatz gilt, so daß jeder Operator aus $\text{Hom}_{M(\mathfrak{A})}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I})$ bezüglich b adjungierbar ist.

Aus (4.5) folgt nun

$$\text{Hom}_{M(\mathfrak{A})}(\mathfrak{I}, \mathfrak{I}) = \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I}) = M(G)_{\text{opp}} .$$

Da $\mathfrak{I}_*$ ein linker Banachmodul über $M(\mathfrak{A})$ ist, haben wir (etwa mit Hilfe von RIEFFEL [7], 2.13):

$$(\mathfrak{I} \hat{\otimes}_{M(\mathfrak{A})} \mathfrak{I}_*)^* = \mathfrak{A}_b(\mathfrak{I}) = M(G)_{\text{opp}} .$$

Dies zeigt, daß die Multiplier Algebra $M(G)$ von G dem Dualraum von $\hat{\mathbb{I}} \hat{\otimes} \mathbb{I}_*$ isometrisch isomorph ist.
./.

(5.13)Satz Sei $(\mathbb{I}, (., ., ., .), \|\cdot\|)$ ein ternärer W^* -Ring.

Dann ist der Prädualraum von $\mathbb{I}$ bis auf isometrische Isomorphie eindeutig bestimmt. $\mathbb{I}_*$ besteht aus genau den linearen Funktionalen auf $\mathbb{I}$, die von der Form

$$x \mapsto \varphi(a_T(x, y)), \quad y \in \mathbb{I}, \varphi \in M(G)_*$$

sind, d.h. es gilt $\mathbb{I}_* = \mathbb{I}_C \otimes M(G)_*$, wenn $\mathbb{I}_C$ den Raum $\mathbb{I}$ versehen mit der konjugierten Skalarmultiplikation bedeutet.

Beweis: Sei $f \in \mathbb{I}_*$.

Nach (5.4) existieren ein $r \in \mathbb{I}$ und ein $\varphi \in M(G)_*$ so, daß $f = \varphi(a_T(., r))$ gilt; dabei kann φ in der Gestalt $\varphi = f(r.)$ geschrieben werden, ist also Γ -stetig auf $M(G)$, wenn Γ die im Beweis zu (5.10) definierte Topologie bedeutet. Da die Projektion Ψ von G^{**} auf $M(G)$ stetig bezüglich $\sigma(G^{**}, G^*)$ und Γ ist, gilt $\varphi \cdot \Psi \in G^*$, d.h.

$\text{rest}_{G^{***}} \varphi \cdot \Psi$ liegt im Prädual von G^{**e} ,

so daß $\varphi \in M(G)_*$ folgt. Daher hat f die behauptete Form.

Sei umgekehrt $g : x \mapsto \varphi(a_T(x, y))$ ein durch $\varphi \in M(G)_*$ und $y \in \mathbb{I}$ gegebenes Funktional auf $\mathbb{I}$.

Nach (5.12) gibt es Folgen $\{x_n\}_n \subset \mathbb{I}$ und

$\{f_n\}_n \subset \mathfrak{I}_*$ so, daß $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \|f_n\| < \infty$ und

$$\varphi(a) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x_n \cdot a) \quad \forall a \in M(\mathbb{G})$$

gelten (man beachte, daß $\mathfrak{I} \hat{\otimes}_{M(\mathfrak{G})} \mathfrak{I}_*$ ein Quotient

des projektiven Tensorproduktes $\mathfrak{I} \hat{\otimes} \mathfrak{I}_*$ ist). Das Funktional f auf $\mathfrak{I}$, welches durch

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(b_T(x_n, y) \cdot x)$$

definiert wird, gehört offenbar zu $\mathfrak{I}_*$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x_n \cdot a_T(x, y)) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(b_T(x_n, y) \cdot x) = f(x) \quad \forall x \in \mathfrak{I}, \end{aligned}$$

d.h. g liegt im Prädual von $\mathfrak{I}$.
./.

Nach PASCHKE [5], 3.8 ist jeder Hilbertmodul, der über einer W^* -Algebra selbstdual ist, Dualraum eines Banachraumes. Aus dieser Tatsache ergibt sich zusammen mit Satz (5.13) sofort das folgende Korollar.

(5.14) Korollar Sei $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein selbst-dualer Hilbertmodul über der W^* -Algebra $\mathfrak{G}$

Mit der ternären Operation

$$(x, y, z) \mapsto x \cdot \langle z | y \rangle$$

und der von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierten Norm versehen ist

$\mathfrak{M}$ ein ternärer W^* -Ring.

Bezeichnet $\mathfrak{M}_C$ den Raum $\mathfrak{M}$ mit der konjugierten Skalarmultiplikation, so ist $\mathfrak{M}_C \hat{\otimes}_G G^*$ der bis auf Isometrie eindeutig bestimmte Prädual von $\mathfrak{M}$.

Im Beweis von Satz (5.1) wurde die Aussage von (2.7) benützt, daß jeder Hilbertmodul, der über einer W^* -Algebra selbstdual ist, als schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring dargestellt werden kann. Mit Hilfe von (5.13) ist es nun leicht zu zeigen, daß auch die Umkehrung gilt:

(5.15) Korollar Sei $\mathfrak{R}$ ein schwach abgeschlossener ternärer Operatorenring zwischen den Hilberträumen H und K .

(a) Mit der ternären Operation

$$(A, B, C) \mapsto AB^*C$$

und der Operatorennorm versehen ist $\mathfrak{R}$ ein ternärer W^* -Ring.

bezeichnet weiter $\mathfrak{R}_H$ die von $\mathfrak{R}^*\mathfrak{R}$ in $\mathcal{L}(H)$ erzeugte W^* -Algebra $\overline{\text{lin} \{ \mathfrak{R}^*\mathfrak{R} \}^\sigma}$, so gilt

(b) Mit $(A, B) \mapsto B^*A$ als $\mathfrak{R}_H$ -wertigem innerem Produkt ist $\mathfrak{R}$ ein selbstdualer Hilbertmodul über $\mathfrak{R}_H$.

(c) Der eindeutig bestimmte Prädual von $\mathfrak{R}$ kann in der Form $\mathfrak{R}_C \otimes (\mathfrak{R}_H)^*$ dargestellt werden.

Beweis: Es ist lediglich noch zu zeigen, daß $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{R}_H$ selbstdual ist.

Sei daher τ ein beliebiger $\mathfrak{R}_H$ -Modulhomomor-

Literaturverzeichnis

- [1] BUSBY, R.C.: Double centralizers of C^* -Algebras.
Transactions AMS, 132, 1968, S.79-99.
- [2] HESTENES, M.R.: A ternary algebra with applications to matrices and linear transformations.
Archive Rat.Mech.An., 11, 1962, S.138-194.
- [3] HESTENES, M.R.: Relative self-adjoint operators in Hilbert Space.
Pacific J., 11, 1961, S.1315-1357.
- [4] KAPLANSKY, I.: Modules over operator algebras.
American J. of Math., 75, 1953, S. 839-858.
- [5] PASCHKE, W.: Inner product modules over B^* -algebras.
Transactions AMS, 182, 1973, S.443-468.
- [6] PASCHKE, W.: Inner product modules arising from compact automorphism groups of v.Neumann Algebras.
Transactions AMS, 224, 1976, S.87-102.
- [7] RIEFFEL, M.A.: Induced Banach representations of Banach Algebras and locally compact groups.
J. of Functional Analysis, 1, 1967, S.443-491.
- [8] RIEFFEL, M.A.: Induced representations of C^* -Algebras.
Advances in Math., 13, 1974, S.176-257.

- [9] SAKAI, S.: C^* -Algebras and W^* -Algebras.
Springer, Ergebnisse der Math., Bd. 60,
Berlin-New York, 1971.

- [10] TAYLOR, D.C.: The strict topology for double
centralizer algebras.
Transactions AMS, 150, 1970, S.633-643.

- [11] WILLIAMSON, J.H.: Algebras in analysis.
Academic Press, London-New York, 1975.

Lebenslauf

Am 11. September 1949 wurde ich, Heinrich Zettl, als Sohn des Bankangestellten Alfred Zettl und seiner Frau Gertrud, geb. Müller, in Kulmbach geboren.

Nach vierjährigem Besuch der Pestalozzi-Volksschule am Ort trat ich im September 1959 in das Markgraf-Georg-Friedrich-Gymnasium in Kulmbach ein und legte dort im Mai 1968 die Abiturprüfung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweiges ab.

Im Wintersemester 1968/69 begann ich in Erlangen mit dem Studium der Mathematik/Physik. Ich hörte Vorlesungen bei den Professoren Baur, Heineken, Jacobs, Köllow und Specht. Im November 1974 bestand ich in Erlangen die Diplomprüfung in Mathematik. Bis zum Sommer 1975 arbeitete ich als Stipendiat der Graduiertenförderung bei Professor Köllow in Erlangen.

Seit August 1975 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei Professor Dr. E. Albrecht an der Universität des Saarlandes tätig.

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990